Erläuterungen

der

Fortsetzung der Anfangsgründe

der

reinen Mathematik

zum

Gebrauch für den Selbstunterricht

von

J. G. C. Kiesewetter,

Doktor und Professor der Philosophie.

[12 a]

Berlin und Leipzig 1818
in Nauck's Buchhandlung.

(9)

Zu §. 1.

Die Auflösung der im §. zu Anfang gegebenen Aufgabe ist ausführlich dargestellt, folgende:

8 Buchstaben geben einzeln aufgestellt, 8 Darstellungen; da nun jeder der 8 Buchstaben mit einem andern, deren folglich noch 7 sind, verbunden werden kann, so entstehen 8mal 7 Verbindungen zu 2 Buchstaben. Zu jeglicher dieser Verbindungen zu 2 kann von den übrigen 6 Buchstaben einer genommen werden, um Verbindungen zu 3 zu bilden, und die Anzahl derselben wird daher 8 . 7 . 6 seyn. Endlich, so wird man zu jeglicher dieser Verbindungen zu 3, einen der folgenden Buchstaben setzen können, um Verbindungen zu 4 zu erhalten und deren giebt es also 8 . 7 . 6 . 5 = 1680.

Zu §. 2. Anmerkung.

Die Verbindungen von a, b, c, d zu 2 sind:

ab, ac, ad, ba, bc, bd, ca, cb, cd, da, db, dc.

Hieraus lassen sich nun die Verbindungen zu 3 angeben, wir wollen sie der leichten Uebersicht wegen in Zeilen nach der Verbindung von 2 abtheilen:

abc, abd	cab, cad
acb, acd	cba, cbd
adb, adc	cda, cdb
bac, bad	dac, dab
bca, bcd	dba, dbc
bda, bdc	dca, dcb

Zu §. 6.

Auflösung der im §. aufgestellten Aufgabe.

Die Versetzungen von abc sind: abc, acb, bac, bca, cab, cba.

Die von abd sind: abd, adb, bad, bda, dab, dba.

Die von acd sind: acd, adc, cad, cda, dac, dca.

Die von bcd sind: bcd, bdc, cbd, cdb, dbc, dcb.

Zu §. 8.

Vergleicht man die in den Erläuterungen von §. 2. und §. 6. aufgestellten Verbindungen und Versetzungen; so wird man bald einsehen, daß a, b, c, d nur 4 Verbindungen zu 3 enthält, in welchen keine Versetzungen vorkommen; diese sind abc, abd, acd und bcd.

Zu §. 9.

Auflösung der im §. enthaltenen Aufgabe:

$$\frac{7.\ 6.\ 5.\ 4.\ 3}{1.\ 2.\ 3\ 4.\ 5} = 21.$$

Anmerkung. Man erleichtert sich das Niederschreiben des Bruchs, wenn man den Nenner eher hinschreibt als den Zähler.

Zu §. 14.

1. Beweis, daß die Anzahl der Produkte von 4 Faktoren aus 10 Buchstaben gleich ist der Summe der

Anzahl der Produkte von 4 und 3 Faktoren aus 9 Buchstaben.

Die Anzahl der Produkte von 4 Faktoren aus 10 Buchstaben ist der §. 10. gegebenen Formel zu Folge $= \frac{10.\ 9.\ 8.\ 7}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$; die von 4 Faktoren aus 9 Buchstaben ist $= \frac{9.\ 8.\ 7.\ 6}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$ und die von 3 Faktoren $\frac{9.\ 8.\ 7}{1.\ 2.\ 3}$.

Es ist aber $\frac{9.\ 8.\ 7.\ 6}{1.\ 2.\ 3.\ 4} + \frac{9.\ 8.\ 7}{1.\ 2.\ 3} = \frac{9.\ 8.\ 7.\ 6}{1.\ 2.\ 3.\ 4} + \frac{9.\ 8.\ 7.\ 4}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$ $= \frac{9.\ 8.\ 7.\ 6 + 9.\ 8.\ 7.\ 4}{1.\ 2.\ 3\ .\ 4} = \frac{(9.\ 8.\ 7).\ (6 + 4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4} = \frac{10.\ 9.\ 8.\ 7}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$.

Die wirklich vorgenommene Multiplikation würde dies gleichfalls darthun. Es ist $\frac{10.\ 9.\ 8.\ 7}{1.\ 2.\ 3.\ 4} = 210$; ferner $\frac{9.\ 8.\ 7.\ 6}{1.\ 2.\ 3.\ 4} = 126$ und $\frac{9.\ 8.\ 7}{1.\ 2.\ 3} = 84$; es ist aber $126 + 84 = 210$.

2. Auflösung der zweiten Aufgabe von §. 14.

Die Anzahl der Produkte von n Faktoren aus m Buchstaben ist $\frac{m.\ m - 1 \ldots\ldots m - (n - 1)}{1.\ \ 2\ \ldots\ldots\ n}$; die Anzahl der Produkte von n Faktoren aus m — 1 Buchstaben ist $\frac{m - 1 . m - 2 \ldots\ldots m - 1 - (n - 2) . m - 1 - (n - 1)}{1 .\ 2 . \ldots\ldots n - 1 . n}$, so wie die Anzahl der Produkte von n — 1 Faktoren aus m — 1 Buchstaben

$$\frac{m - 1 .\ m - 2 \ldots\ldots m - 1 - (n - 2)}{1.\ \ 2.\ \ldots\ldots\ n - 1}.$$

Um nun die beiden letzten Brüche zu addiren, muß man sie zuvörderst auf gleiche Benennung bringen und dies geschieht, wenn man in dem Zähler und Nenner des letzten n als Faktor hinzufügt. Ihre Summe ist also

$$\frac{m-1.m-2......m-1-(n-2).m-1-(n-1)}{1.\ 2\ ....\ n-1.n} + \frac{m-1.m-2.....m-1-(n-2).n}{1.\ 2.\ .....\ n-1.n}$$

$$= \frac{m-1.m-2.....m-1-(n-2).m-1-(n-1) + m-1.m-2.....m-1-(n-2).n}{1.\ 2\ .\ ....\ n-1.n}$$

$$= \frac{m-1.m-2.......m-1-(n-2).(m-1-(n-1)+n)}{1.\ 2.\ ....\ n} =$$

$\frac{m-1.m-2.....m-1-(n-2).m}{1.\ 2.\ ....\ n}$ (denn es ist $m-1-(n-1)+n = m-1-n+1+n = m$); folglich ist der vorhergehende Werth

$$= \frac{m.m-1.m-2......m-1-(n-2)}{1,\ 2\ ....\ n}.$$

Vergleicht man diesen Werth mit dem oben angegebenen der Anzahl der Produkte von n Faktoren aus m Buchstaben, so sind die Nenner völlig gleich; beide Zähler fangen mit m an, und jeder folgende Faktor fällt um 1, um ihre völlige Identität darzuthun muß man also bloß zeigen, daß $m-(n-1) = m-1-(n-2)$, was aber leicht einzusehen ist; denn $m-(n-1) = m+1-n$ und $m-1-(n-2) = m-1-n+2 = m+1-n$.

Zu §. 17.

In dem Produkte von $a+b$ und $a+c$ findet sich 1) das Produkt, besteht aus 3 Gliedern; 2) das erste Glied ist a^2, im folgenden Gliede nimmt der Exponent von a um 1 ab, und im dritten ist a gar nicht vorhanden; 3) im ersten Gliede findet sich außer a kein Faktor, im zweiten noch einer; 4) der erste Coefficient ist die Summe der zweiten Glieder der Faktoren; 5) das

dritte Glied ist das Produkt aus den beiden zweiten Gliedern der Faktoren.

Das Produkt von a + b, a + c und a + d besteht aus 4 Gliedern, das erste ist a^3, in jedem folgenden Gliede nimmt der Exponent von a um 1 ab und im vierten Gliede ist a nicht vorhanden (man kann auch sagen im vierten Gliede findet sich a^0, denn a^0 ist = 1); der erste Coefficient ist b + c + d, die Summe der zweiten Glieder der Faktoren; der zweite Coefficient ist bc + bd + be + cd + ce + de d. h. die Summe aller Produkte von je zwei und zwei der zweiten Glieder der Faktoren; der dritte Coefficient ist bcd + bce + bde + cde, die Summe aller Produkte von je drei und drei der zweiten Glieder der Faktoren, und endlich ist das vierte Glied bcde das Produkt aller zweiten Glieder der Faktoren.

Zu §. 15.

Seite 15 Zeile 8 von oben lies $+ ca^2 + bda$ statt $ca^2 + bca +$.

Zu §. 21.

Auflösung der Aufgabe 1.

$$a \,\Big|\, \frac{1 - x}{a + ax + ax^2}$$

$$a - ax$$
$$- \;\; +$$
$$+ ax$$
$$+ ax - ax^2$$
$$- \;\; +$$
$$ax^2$$
$$ax^2 - ax^3$$
$$- \;\; +$$
$$ax^3$$

Das Ergänzungsglied wäre für diesen Quotienten $\frac{ax^3}{1-x}$; übrigens sieht man leicht ein, daß man die Reihe des Quotienten, so weit als man will, fortsetzen kann.

Auflösung der Aufgabe 2.

$$a \;\Big|\; \frac{x-1}{\frac{a}{x}+\frac{a}{x^2}+\frac{a}{x^3}}$$

$$\begin{array}{l} a - \frac{a}{x} \\ - \;\; + \\ \hline \quad + \frac{a}{x} \\ \quad + \frac{a}{x} - \frac{a}{x^2} \\ \quad - \;\;\; + \\ \hline \qquad + \frac{a}{x^2} \\ \qquad + \frac{a}{x^2} - \frac{a}{x^3} \\ \hline \qquad\quad + \frac{a}{x} \end{array}$$

Daß aber $a\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\ldots\ldots\right)$ $= \frac{a}{x}+\frac{a}{x^2}+\frac{a}{x^3}\ldots\ldots$ erkennt man, wenn man das in der Parenthese Befindliche mit a multiplicirt.

In dem vorliegenden Fall ist das Ergänzungsglied

$$\frac{\frac{a}{x^3}}{x-1} = \frac{a}{x^4 - x^3}$$

Auflösung der Aufgabe 3.

$$a \,\Big|\, \frac{a + x}{1 - \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} \ldots\ldots}$$

$$\begin{array}{l}
a + x \\
- \;\; - \\
\hline
- x \\
- x - \frac{x^2}{a} \\
- \;\; + \\
\hline
\frac{x^2}{a} \\
\frac{x^2}{a} + \frac{x^3}{a^2} \\
- \;\; - \\
\hline
- \frac{x^3}{a^2}
\end{array}$$

Das Ergänzungsglied ist $= - \frac{\frac{x^3}{a^2}}{a + x} = \frac{- x^3}{a^2 . (a + x)}$.

Auflösung der Aufgabe 4.

$$a \,\Big|\, \frac{a - x}{1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2}}$$

$$\begin{array}{l}
a - x \\
- \;\; + \\
\hline
+ x \\
x - \frac{x^2}{a^2} \\
- \;\; + \\
\hline
+ \frac{x^2}{a} \\
\frac{x^2}{a} - \frac{x^3}{a^2} \\
- \;\; + \\
\hline
+ \frac{x^3}{a^2}
\end{array}$$

Ergänzungsglied $\frac{x^3}{a^2 . (a - x)}$

Division von 6 durch 6 — 1.

$$6 \mid 6 - 1 \quad \text{Quotient: } 1 + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{36} + \tfrac{1}{216} + \tfrac{1}{1296} \ldots\ldots$$

$$\begin{array}{l} 6 - 1 \\ - \; + \\ \hline 1 \\ 1 - \tfrac{1}{6} \\ - \; + \\ \hline \tfrac{1}{6} \\ \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{36} \\ - \; + \\ \hline \tfrac{1}{36} \\ \tfrac{1}{36} - \tfrac{1}{216} \\ - \; + \\ \hline \tfrac{1}{216} \\ \tfrac{1}{216} - \tfrac{1}{1296} \\ - \; + \\ \hline + \tfrac{1}{1296}. \end{array}$$

Ergänzungsglied $\frac{1}{1296} \cdot 5 = \frac{1}{6480}$.

$$1 + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{36} + \tfrac{1}{216} + \tfrac{1}{1296} + \tfrac{1}{6480} = 1 + \tfrac{1296}{6480} = 1\tfrac{1}{5}.$$

Zu §. 22.

Will man $\frac{8}{1-3}$ nach der §. 21. gegebenen Formel von $\frac{a}{1-x}$ bestimmen, so ist $a = 8$, $x = 3$. Nun war aber $\frac{a}{1-x} = a + ax^3 + ax^2 + \frac{ax^3}{1-x}$ also $\frac{8}{1-3} = 8 + 8 \cdot 3 + 8 \cdot 3^2 + \frac{8 \cdot 3^3}{1-3}$.

Zu §. 23.

In der Erläuterung des Satzes $\frac{1}{1-1} = \infty$ wird gesagt, das Exempel fordere, daß man den Divisor Null nicht als ein bloßes Zeichen, sondern als eine Zahl, also aus 1 entsprungen sich denke; dies bedarf gewiß für mehrere Leser noch einer nähern Auseinandersetzung. In den meisten Fällen, wo eine Null sich findet, dient

sie blos als Zeichen, daß von einer gewissen Art Dinge nichts vorhanden ist, und sie ist sodann keine Zahl; allein in dem vorliegenden Fall $\frac{1}{0}$ findet dies nicht statt, denn $\frac{1}{0}$ heißt eine Zahl, welche aus 1 entsteht, wie 1 aus 0 entstanden ist. Aus Nichts aber kann durch Setzen (und jede Zahlerzeugung ist nichts anders als Setzen) niemals 1 entstehen, man muß also die Null als ein Etwas, als eine Zahl, sich vorstellen, also als aus der Einheit erzeugt. Jede Erzeugung aus der Einheit aber geschieht entweder durch das Setzen der Einheit selbst (ganze Zahl) oder durch das Setzen eines Theils derselben. Dies letztere kann nur beim Vorstellen der Null angewandt werden; man denke sich also die Einheit in eine unendliche Anzahl Theile getheilt, so wird der Theil immer kleiner, je weiter die Theilung fortgesetzt wird, und nähert sich dem Verschwinden (also der Null) immer mehr, obgleich auf diese Weise die Null nie wirklich erreicht wird. Die Rückerzeugung der 1 aus dieser sogenannten Null, wird also durch das unendlichmalige Setzen derselben hervorgebracht; da nun das Exempel fordert, man soll aus 1 eine Zahl erzeugen, wie 1 aus 0 entstanden, so wird man 1 unendlich oft setzen müssen. Also $\frac{1}{0} = \infty$.

Daß das Obengesagte richtig ist, sieht man auch daraus, daß wenn $\frac{1}{0} = \infty$, $0 = \frac{1}{\infty}$ oder Null als ein Unendlich kleines betrachtet wird.

Druckfehler. Die Aufgabe muß heißen: Man soll 1 durch 1 — 1 dividiren.

Zu §. 24.

```
1 | 1 + 1
  | 1 − 1 + 1 − 1 .....
1 + 1
−
−1
−1 − 1
+   +
   +1
   +1 + 1
   −   −
      −1
      −1 − 1
      +   +
         +1
         +1 + 1
         −   −
            −1
```

Auflösung der Aufgabe: Man soll 1 durch 1 — 2 dividiren.

```
1 | 1 − 2
  | 1 + 2 + 4 .....
1 − 2
− +
  2
  2 − 4
  − +
   + 4
   + 4 − 8
   −   +
      + 8
```

In der vorliegenden Auflösung ist das Ergänzungsglied $\frac{8}{1-2} = \frac{8}{-1} = -8$, und also der vollständige Quotient $1 + 2 + 4 - 8 = -1$, wie denn auch $\frac{1}{1-2} = \frac{1}{-1} = -1$.

Zu §. 25.

$$
\begin{array}{l|l}
 & x - a \\
\hline
x^6 - a^6 & x^5 + ax^4 + a^2x^3 + a^3x^2 + a^4x + a^5 \\
x^6 - ax^5 & \\
- \quad + & \\
\hline
\quad ax^5 - a^6 & \\
\quad ax^5 - a^2x^4 & \\
\quad - \quad + & \\
\hline
\qquad a^2x^4 - a^6 & \\
\qquad a^2x^4 - a^3x^3 & \\
\qquad - \quad + & \\
\hline
\qquad\quad a^3x^3 - a^6 & \\
\qquad\quad a^3x^3 - a^4x^2 & \\
\qquad\quad - \quad + & \\
\hline
\qquad\qquad a^4x^2 - a^6 & \\
\qquad\qquad a^4x^2 - a^5x & \\
\qquad\qquad - \quad + & \\
\hline
\qquad\qquad\quad a^5x - a^6 & \\
\qquad\qquad\quad a^5x - a^6 & \\
\qquad\qquad\quad - \quad + & \\
\hline
\end{array}
$$

Daß $x^{m-1} + ax^{m-2} \ldots\ldots a^{m-2}x + a^{m-1}$ aus m Gliedern besteht, erkennt man aus folgendem: Da der Exponent von x im ersten Gliede m — 1 ist, und in jedem folgenden Gliede um 1 abnimmt, bis im vorletzten Gliede sich noch x findet, so sind m — 1 Glieder vorhanden, in welchen x befindlich, zu diesen kommt noch das letzte Glied, in welchem kein x angetroffen wird; also sind m Glieder im Quotienten.

Zu §. 26.

Um sich zu überzeugen, daß $\frac{x^6 - a^6}{x - a} = x^5 + ax^4 + a^2x^3 + a^3x^2 + a^4x + a^5$, nehme man folgende Multiplication vor:

$$x^5 + ax^4 + a^2x^3 + a^3x^2 + a^4x + a^5$$
$$x - a$$
$$x^6 + ax^5 + a^2x^4 + a^3x^3 + a^4x^2 + a^5x$$
$$- ax^5 - a^2x^4 - a^3x^3 - a^4x^2 - a^5x - a^6$$
$$x^6 \qquad - a^6$$

Zu §. 27.

$$a^n + b \;\Big|\; \frac{a + b}{a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-}b^2}$$
$$a^n + a^{n-1}b$$
$$- \quad -$$
$$- a^{n-1}b + b^n$$
$$- a^{n-1} - a^{n-2}b^2$$
$$+ \quad +$$
$$a^{n-2}b^2 + b^n$$
$$a^{n-2}b^2 + a^{n-3}b^2$$
$$- \quad -$$
$$- a^{n-3}b^2 + b^n$$

Da n eine ganze positive Zahl ist, so wird im Quotienten der Exponent von a einmal 1 werden, in welchem Fall b zum Exponenten n — 2 hat; der Rest ist sodann $ab^{n-1} + b^n$ und dieser durch $a + b$ dividirt giebt, wenn man auf das Zeichen von ab^{n-1} keine Rücksicht nimmt b^{n-1}. Das Zeichen des letzten Gliedes hängt davon ab, ob ab^{n-1} + oder — ist; im ersten Fall ist der letzte Theil des Quotienten b^{n-1} positiv und $b^{n-1} \times (a + b) = ab^{n-1} + b^n$ ist dem Rest gleich, folglich die Division vollendet; im zweiten Fall ist der letzte Theil des Quotienten b^{n-1} negativ und $-b^{n-1} \times (a + b) = - ab^{n-1} - b^n$, wodurch also der Rest nicht vernichtet wird, sondern der Rest $2\,b^n$ bleibt. Es wird aber ab^{n-1} erst durch die Subtraction + oder —, es hat also das entgegengesetzte Zeichen des vorletzten

Gliedes des Quotienten; soll es daher $+$ werden, so muß das vorletzte oder $n - 1^{ste}$ Glied des Quotienten $-$ seyn, das ist es wenn $n - 1$ eine gerade Zahl ist; es wird also die Division vollendet seyn, wenn n ungerade ist.

Division von $a^5 + b^5$ durch $a + b$.

$$a^5 + b^5 \;\Big|\; \frac{a + b}{a^4 - a^3 b + a^2 b^2 - ab^3 + b^4}$$

$$a^5 + a^4 b$$
$$- \quad -$$
$$- a^4 b + b^5$$
$$- a^4 b - a^3 b^2$$
$$+ \quad +$$
$$a^3 b^2 + b^5$$
$$a^3 b^2 + a^2 b^3$$
$$- \quad -$$
$$- a^2 b^3 + b^5$$
$$- a^2 b^3 - ab^4$$
$$+ \quad +$$
$$ab^4 + b^5$$
$$ab^4 + b^5$$
$$- \quad -$$

Division von $a^4 + b^4$ durch $a + b$.

$$a^4 + b^4 \;\Big|\; \frac{a + b}{a^3 - a^2 b + ab^2 - b^3}$$

$$a^4 + a^3 b$$
$$-$$
$$- a^3 b + b^4$$
$$- a^3 b - a^2 b^2$$
$$+ \quad +$$
$$a^2 b^2 + b^4$$
$$a^2 b^2 + ab^3$$
$$- \quad -$$
$$- ab^3 + b^4$$
$$- ab^3 - b^4$$
$$+ \quad +$$
$$b^4\ 2$$

Zu §. 30.

$$\frac{7}{24} = \frac{1}{3 + \frac{3}{7}},\ \frac{3}{7} = \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}\ \text{alſo}\ \frac{7}{24} = \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{3}}}$$

$$\frac{5}{12} = \frac{1}{2 + \frac{2}{5}},\ \frac{2}{5} = \frac{1}{2 + \frac{1}{2}},\ \text{alſo}\ \frac{5}{12} = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{2}}}$$

$$\frac{134}{298} = \frac{1}{2 + \frac{30}{134}},\ \frac{30}{134} = \frac{1}{4 + \frac{14}{30}},\ \frac{14}{130} = \frac{1}{2 + \frac{2}{14}}$$

$$\frac{2}{14} = \frac{1}{7};\ \text{alſo}\ \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{7}}}} = \frac{134}{298}.$$

Zu §. 31.

Seite 34 Zeile 2 von oben lies $\frac{3}{11}$ ſtatt $\frac{3}{10}$.

Um $\frac{328}{1257}$ in der Form $\cfrac{4}{15 + \cfrac{3}{9 + \frac{1}{9}}}$ darzuſtellen geſchahen folgende arithmetiſche Operationen: man dividirte Zähler und Nenner durch 82, dies gab $\frac{4}{15 + \frac{27}{82}}$; $\frac{27}{82}$ giebt, wenn man Zähler und Nenner durch 9 theilt $\frac{3}{9 + \frac{1}{9}}$.

Auflöſung der Aufgaben.

1. Man ſoll $\cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{3}}}$ in einen gemeinen Bruch verwandeln.

$$2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3};\ \text{daher}\ \frac{1}{2\frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{7}{3}} = \frac{3}{7}$$

$$\text{Alſo}\ \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{3}}} = \frac{1}{3 + \frac{3}{7}}.$$

$$3\ \frac{3}{7} = \frac{24}{7};\ \text{folglich}\ \frac{1}{3\frac{3}{7}} = \frac{1}{\frac{24}{7}} = \frac{7}{24}.$$

2. Man soll $\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}$ in einen gemeinen Bruch verwandeln.

$$\frac{1}{2+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5}.$$

$$\frac{1}{2\frac{2}{5}} = \frac{1}{\frac{12}{5}} = \frac{5}{12}.$$

3. Man soll $\frac{1}{2+\frac{1}{4+\frac{1}{2+\frac{1}{7}}}}$ in einen gemeinen Bruch verwandeln.

$2\frac{1}{7} = \frac{15}{7}$; also $\frac{1}{2+\frac{1}{4+\frac{1}{2+\frac{1}{7}}}} = \frac{1}{2+\frac{1}{4+\frac{1}{\frac{15}{7}}}} = \frac{1}{2+\frac{1}{4+\frac{7}{15}}}$; ferner ist $4\frac{7}{15}=\frac{67}{15}$, also $=\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{67}{15}}} = \frac{1}{2+\frac{15}{67}}$.

Endlich $2\frac{15}{67} = \frac{149}{67}$; also $\frac{1}{\frac{149}{67}} = \frac{67}{149}$.

Man sieht leicht, daß diese Auflösung mit §. 30. übereinstimmt, wo der Bruch $\frac{134}{298}$ $\left(=\frac{67}{149}\right)$ gegeben wurde.

4. Man soll $\frac{2}{3+\frac{4}{5+\frac{6}{7+\frac{8}{9}}}}$ in einen gemeinen Bruch verwandeln.

$7\frac{8}{9} = \frac{71}{9}$; also $\frac{2}{3+\frac{4}{5+\frac{6}{7+\frac{8}{9}}}} = \frac{2}{3+\frac{4}{5+\frac{6}{\frac{71}{9}}}}$

Es ist aber $\frac{6}{\frac{71}{9}} = \frac{54}{71}$, folglich erhält der Ketten-bruch die Form $\cfrac{2}{3 + \cfrac{4}{5\frac{54}{71}}}$.

$5\frac{54}{71} = \frac{409}{71}$; folglich $\cfrac{2}{3 + \cfrac{4}{5\frac{54}{71}}} = \cfrac{2}{3 + \cfrac{4}{\frac{409}{71}}} = \cfrac{2}{3 + \frac{284}{409}}$.

Endlich ist $3\frac{284}{409} = \frac{1511}{409}$; folglich $\frac{2}{3\frac{284}{409}} = \frac{2}{\frac{1511}{409}} = \frac{818}{1511}$.

Zu §. 36.

Seite 41 Zeile 6 von oben lies: es ist aber $AE = CE + CD + AD = 2CE + AD = 2AB + AD$.

Zu §. 38.

Die in Worten ausgedrückten Gesetze, wovon §. 38. spricht, sind folgende:

Die Dignität hat ein Glied mehr als die Zahl des Exponenten anzeigt; so hat z. B. die 6te Dignität von $a + b$ 7 Glieder.

Das erste Glied enthält a in der Dignität, die der Exponent besagt (in der 6ten Dignität a^6), in jedem folgenden Gliede nimmt der Exponent von a um 1 ab, und im letzten Gliede verschwindet a ganz. Mit dem zweiten Gliede tritt b als Faktor ein, und zwar im zweiten Gliede in der ersten Dignität, und der Exponent von b steigt in jedem folgenden Gliede um 1, so wie der Exponent von a um 1 fällt; es wird also in jedem Gliede die Summe der Exponenten von a und b gleich dem

dem Exponenten der Dignität (bei der 6ten Potenz = 6) seyn; das letzte Glied wird blos b mit dem Exponenten der Dignität enthalten (in der sechsten Dignität b^6).

Will man die Exponenten von a und b eines Gliedes bestimmen, so fange man mit b an, und gebe ihm die Zahl des Gliedes weniger 1 zum Exponenten; da nun der Exponent von a mit dem von b zusammengenommen dem Exponenten der Dignität gleich seyn soll, so ziehe man den Exponenten von b vom Exponenten der Dignität ab, so erhält man den Exponenten von a. So ist z. B. das 5te Glied der sechsten Dignität was b betrifft b^4, folglich erhält a zum Exponenten 2; das ganze fünfte Glied ist also $a^2 b^4$, versteht sich, daß der Coefficient hierdurch noch nicht bestimmt ist.

Der Coefficient ist die Zahl, die bei jedem Gliede sich findet, und man rechnet vom zweiten Gliede an; man erhält ihn durch Auflösung eines Bruchs, dessen Zähler und Nenner, jeder aus so viel Faktoren besteht, als die Zahl des Coefficienten anzeigt (so besteht z. B. der Zähler und Nenner des dritten Coefficienten aus 3 Faktoren). Der Nenner dieses Bruchs läßt sich am leichtesten bestimmen, seine Faktoren sind die Zahlen in ihrer natürlichen Folge von 1 an (so ist z. B. der Nenner des dritten Coefficienten 1 . 2 . 3); die Faktoren des Zählers hingegen fangen mit dem Exponenten der Dignität an, und jeder folgende Faktor wird um 1 kleiner (so ist z. B. der Zähler des dritten Coefficienten der sechsten Dignität 6 . 5 . 4 und der ganze dritte Coefficient dieser Dignität $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20$).

Der Coefficient des ersten Gliedes, welcher nicht mitgezählt wird, ist = 1; aber auch der letzte Coefficient ist = 1; denn sein Zähler und Nenner stimmen in ihren Faktoren überein. (Der letzte oder 6te Coefficient der 6ten Dignität ist $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 1$ und der letzte oder mte Coefficient der mten Dignität ist

$$\frac{m \cdot m-1 \ldots\ldots\ldots 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \ldots\ldots, m-1 \cdot m} = 1)$$

Auflösung der §. 38. gegebenen Aufgaben.

Das 6te Glied der 12ten Dignität ist

$$= \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} a^7 b^5 = 792\, a^7 b^5.$$

Das 7te Glied der 12ten Dignität ist

$$= \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} a^6 b^6 = 924\, a^6 b^6.$$

Das nte Glied der mten Dignität ist

$$\frac{m \cdot m-1 \ldots\ldots m-(n-1)}{1 \cdot 2 \ldots\ldots n-1} a^{m-(n-1)} b^{n-1}.$$

Das nte Glied der m + 1sten Dignität ist

$$\frac{m+1 \cdot m \ldots\ldots m+1-(n-1)}{1 \cdot 2 \ldots\ldots n-1} a^{m+1-(n-1)} b^{n-1}.$$

Zu §. 39.

Auflösung der Aufgaben.

1. $(a+b)^9 = a^9 + \frac{9}{1} a^8 b + \frac{9 \cdot 8}{1 \cdot 2} a^7 b^2 + \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^6 b^3 + \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^5 b^4 + \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} a^4 b^5 + \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} a^3 b^6 + \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} a^2 b^7 + \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} ab^8 + \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9} b^9 = a^9$

$+ 9 a^8 b + 36 a^7 b^2 + 84 a^6 b^3 + 126 a^5 b^4 + 126 a^4 b^5 + 84 a^3 b^6 + 36 a^2 b^7 + 9 ab^8 + b^9.$

2. Das 4te Glied der 10ten Dignität ist

$$= \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^7 b^3 = 120 a^7 b^3.$$

Zu §. 42.

In der letzten Zeile dieses §. lies ${}^{m}\overset{r}{N}$ statt ${}^{m}N$.

Zu §. 43.

Seite 51 Zeile 7 von unten lies:

$${}^{m+1}N = {}^{m}N + {}^{m-1}N + {}^{m-2}N \ldots\ldots {}^{m-r}1N + {}^{m-r-1}\overset{+1}{N},$$ statt

$${}^{m+1}N = {}^{m}\overset{+1}{N} + {}^{m-1}N + {}^{m-2}N \ldots\ldots {}^{m-r-1}N + {}^{m-r-1}\overset{+1}{N}$$

Zu §. 44.

Man soll den 4ten Coefficienten der Reihe deren Exponent 7 ist auf dem angegebenen Wege finden.

Die Bezeichnung des vierten Coefficienten dieser Reihe ist ${}^{7}\mathfrak{D} = {}^{7}\overset{+1}{\mathfrak{C}}$; es ist aber

$${}^{7}\overset{+1}{\mathfrak{C}} = {}^{6}\mathfrak{C} + {}^{6}\overset{+1}{\mathfrak{C}}$$
$${}^{6}\overset{+1}{\mathfrak{C}} = {}^{5}\mathfrak{C} + {}^{5}\overset{+1}{\mathfrak{C}}$$
$${}^{5}\overset{+1}{\mathfrak{C}} = {}^{4}\mathfrak{C} + {}^{4}\overset{+1}{\mathfrak{C}}$$
$${}^{4}\overset{+1}{\mathfrak{C}} = {}^{3}\mathfrak{C} + {}^{3}\overset{+1}{\mathfrak{C}}$$

${}^{3}\overset{+1}{\mathfrak{C}}$ heißt der vierte Coefficient der dritten Reihe, diese hat aber nur 3 Coefficienten und es ist ${}^{3}\overset{+1}{\mathfrak{C}} = 0$, folglich hört der Werth mit ${}^{3}\mathfrak{C}$ auf.

Nimmt man nun die gehörigen Substitutionen vor, so ist: ${}^{7}\overset{+1}{\mathfrak{C}} = {}^{6}\mathfrak{C} + {}^{5}\mathfrak{C} + {}^{4}\mathfrak{C} + {}^{3}\mathfrak{C}$.

Nach der §. 38. gefundenen Regel ist $\overset{+1}{{}^{7}\mathfrak{C}}$ oder der vierte Coefficient der siebenten Reihe $= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 35.$ Setzt man auf dieselbe Weise die Werthe von ${}^{6}\mathfrak{C}$, ${}^{5}\mathfrak{C}$, ${}^{4}\mathfrak{C}$, ${}^{3}\mathfrak{C}$, so erhält man

$$\frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$= \frac{6.5.4 + 5.4.3 + 4.3.2 + 3.2.1}{1\,.\,2\,.\,3} = \frac{120 + 60 + 24 + 6}{1\,.\,2\,.\,3}$$

$$= \frac{210}{6} = 35.$$

Zu §. 45.

Auflösung der Aufgabe.

Hier ist $m = 7$, $n = 4$, die Zahl der Glieder also $7 - 4 + 1 = 4$; wie sich dies auch aus der Erläuterung zu §. 44. ergab.

Zu §. 47.

Auflösung der im §. aufgestellten Aufgaben.

1. Man soll ${}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{D}$ bis $\overset{+1}{{}^{\frac{1}{2}-5}\mathfrak{C}}$ bestimmen.

$${}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{D} = {}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{C} + {}^{\frac{1}{2}-1}\mathfrak{C} + {}^{\frac{1}{2}-2}\mathfrak{C} + {}^{\frac{1}{2}-3}\mathfrak{C} + {}^{\frac{1}{2}-4}\mathfrak{C} + {}^{\frac{1}{2}-5}\mathfrak{C} + \overset{+1}{{}^{\frac{1}{2}-5}\mathfrak{C}}$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem §. 46. gefundenen, so sieht man, daß beide übereinstimmen, nur daß dort $\overset{+1}{{}^{\frac{1}{2}-4}\mathfrak{C}}$ und hier ${}^{\frac{1}{2}-5}\mathfrak{C} + \overset{+1}{{}^{\frac{1}{2}-5}\mathfrak{C}}$ sich findet. Hiernach läßt sich die Abänderung leicht treffen:

$${}^{\frac{1}{2}-6}\mathfrak{C} = \frac{\frac{1}{2}-5 \cdot \frac{1}{2}-6 \cdot \frac{1}{2}-7}{1\,.\,2\,.\,3} = \frac{1-10\,.\,1-12\,.\,1-14}{2\,.\,4\,.\,6} =$$

$$\frac{-9\,.\,-11\,.\,-13}{2\,.\,4\,.\,6} = -\frac{9\,.\,11\,.\,13}{2\,.\,4\,.\,6}$$

$$^{\frac{1}{2}-5}\overset{+1}{\mathfrak{C}} = \frac{\frac{1}{2}-5 \,.\, \frac{1}{2}-6 \,.\, \frac{1}{2}-7 \,.\, \frac{1}{2}-8}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} = \frac{1-10 \,.\, 1-12 \,.\, 1-14 \,.\, 1-16}{2 \,.\, 4 \,.\, 6 \,.\, 8}$$

$$= \frac{-9 \,.\, -11 \,.\, -13 \,.\, -15}{2 \,.\, 4 \,.\, 6 \,.\, 8} = + \frac{9 \,.\, 11 \,.\, 13 \,.\, 15}{2 \,.\, 4 \,.\, 6 \,.\, 8}$$

Folglich ist:

$$^{\frac{1}{2}}\mathfrak{D} = \frac{1 \,.\, 1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4 \,.\, 6} - \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5}{2 \,.\, 4 \,.\, 6} - \frac{3 \,.\, 5 \,.\, 7}{2 \,.\, 4 \,.\, 6} - \frac{5 \,.\, 7 \,.\, 9}{2 \,.\, 4 \,.\, 6}$$

$$- \frac{7 \,.\, 9 \,.\, 11}{2 \,.\, 4 \,.\, 6} - \frac{9 \,.\, 11 \,.\, 13}{2 \,.\, 4 \,.\, 6} + \frac{9 \,.\, 11 \,.\, 13 \,.\, 15}{2 \,.\, 4 \,.\, 6 \,.\, 8}.$$

Nimmt man die angedeuteten Operationen wirklich vor, so erhält man:

$$^{\frac{1}{2}}\mathfrak{D} = \frac{3}{48} - \frac{15}{48} - \frac{105}{48} - \frac{315}{48} - \frac{693}{48} - \frac{1287}{48} + \frac{19305}{384} =$$

$$- \frac{2418}{48} + \frac{19305}{384} = - \frac{19344}{384} + \frac{19305}{384} = \frac{39}{384} = \frac{13}{128}.$$

Entwickelt man den §. 46. gefundenen Werth für $^{\frac{1}{2}}\mathfrak{D}$, so bekommt man:

$$^{\frac{1}{2}}\mathfrak{D} = \frac{3}{48} - \frac{15}{48} - \frac{105}{48} - \frac{315}{48} - \frac{693}{48} + \frac{9009}{384} =$$

$$- \frac{1131}{48} + \frac{9009}{384} = - \frac{9048}{384} + \frac{9009}{384} = \frac{39}{384} = \frac{13}{128}.$$

2. Man soll den 5ten Coefficienten für die Reihe deren Exponent $\frac{1}{3}$ bis $^{\frac{1}{3}-4}\overset{+1}{\mathfrak{D}}$ bestimmen.

Das Zeichen des 5ten Coefficienten für diese Reihe ist $^{\frac{1}{3}}\mathfrak{E}$; es ist aber $^{\frac{1}{3}}\mathfrak{E} = {}^{\frac{1}{3}-1}\mathfrak{D} + {}^{\frac{1}{3}-2}\mathfrak{D} + {}^{\frac{1}{3}-3}\mathfrak{D} + {}^{\frac{1}{3}-4}\mathfrak{D} + {}^{\frac{1}{3}-4}\overset{+1}{\mathfrak{D}}$.

Ferner ist $^{\frac{1}{3}-1}\mathfrak{D} = \frac{\frac{1}{3}-1 \,.\, \frac{1}{3}-2 \,.\, \frac{1}{3}-3 \,.\, \frac{1}{3}-4}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} =$

$$\frac{1-3 \,.\, 1-6 \,.\, 1-9 \,.\, 1-12}{3 \,.\, 6 \,.\, 9 \,.\, 12} = \frac{-2 \,.\, -5 \,.\, -8 \,.\, -11}{3 \,.\, 6 \,.\, 9 \,.\, 12} = \frac{2 \,.\, 5 \,.\, 8 \,.\, 11}{3 \,.\, 6 \,.\, 9 \,.\, 2}$$

$$\tfrac{1}{3}{}^{-2}\mathfrak{D} = \frac{\frac13-2.\frac13-3.\frac13-4.\frac13-5}{1.2.3.4} = \frac{1-6.1-9.1-12.1-15}{3.6.9.12} =$$

$$\frac{-5.-8.-11.-14}{3.6.9.12} = \frac{5.8.11.14}{3.6.9.12}$$

$$\tfrac{1}{3}{}^{-3}\mathfrak{D} = \frac{\frac13-3.\frac13-4.\frac13-5.\frac13-6}{1.2.3.4} = \frac{1-9.1-12.1-15.1-18}{3.6.9.12}$$

$$= \frac{-8.-11.-14.-17}{3.6.9.12} = \frac{8.11.14.17}{3.6.9.12}$$

$$\tfrac{1}{3}{}^{-4}\mathfrak{D} = \frac{\frac13-4.\frac13-5.\frac13-6.\frac13-7}{1.2.3.4} = \frac{1-12.1-15.1-18.1-21}{3.6.9.12}$$

$$= \frac{-11.-14.-17.-20}{3.6.9.12} = \frac{11.14.17.20}{3.6.9.12}$$

$$\tfrac{1}{3}{}^{-4}\overset{+1}{\mathfrak{D}} = \frac{\frac13-4.\frac13-5.\frac13-6.\frac13-7.\frac13-8}{1.2.3.4.5} = \frac{1-12.1-15.1-18.1-21.1-24}{3.6.9.12.15}$$

$$= \frac{-11.-14.-17.-20.-23}{3.6.9.12.15} = -\frac{11.14.17.20.23}{3.6.9.12.15}$$

Hieraus folgt;

$$\tfrac{1}{3}\mathfrak{E} = \frac{2.5.8.11}{3.6.9.12} + \frac{5.8.11.14}{3.6.9.12} + \frac{8.11.14.17}{3.6.9.12}$$

$$+ \frac{11.14.17.20}{3.6.9.12} - \frac{11.14.17.20.23}{3.6.9.12.15} = \frac{880}{1944} +$$

$$\frac{6160}{1944} + \frac{20944}{1944} + \frac{52360}{1944} - \frac{1204280}{29160} = \frac{80344}{1944} - \frac{1204280}{29160}$$

$$= \frac{1205160}{29160} - \frac{1204280}{29160} = \frac{880}{29160} = \frac{22}{729}.$$

Zu §. 49.

Lehrsatz. Es ist $7\,{}^{10}\mathfrak{G} = (10-7+1)\,{}^{10}\overset{-1}{\mathfrak{G}} = 4\,{}^{10}\overset{-1}{\mathfrak{G}}$.

Beweis. $${}^{10}\mathfrak{G} = \frac{10.9.8.7.6.5.4}{1.2.3.4.5.6.7}$$

und $${}^{10}\overset{-1}{\mathfrak{G}} = \frac{10.9.8.7.6.5}{1.2.3.4.5.6}$$

Es ist aber $\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \times \frac{4}{7}$

also $7 \times \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \times 4$

d. h. $7\,{}^{10}\mathfrak{S} = 4\,{}^{10}\overset{-1}{\mathfrak{S}}$.

Zu §. 52.

Seite 58 Zeile 3 von oben lies $+(\beta-n+2)\,{}^{\alpha}\mathfrak{A}\,{}^{\beta}\overset{-2}{N}$ statt $+(\beta-n+2)\,{}^{\alpha}\mathfrak{A}\,{}^{\beta}\overset{-1}{N}$.

Zeile 5 von oben lies $+(\beta-n+4)\,{}^{\alpha}\mathfrak{C}\,{}^{\beta}\overset{-4}{N}$ statt $+(\beta-n+4)\,{}^{\beta}\mathfrak{C}\,{}^{\beta}\overset{-4}{N}$.

Seite 59 Zeile 8 von oben lies $(\beta-1)\,{}^{\alpha}\overset{-2}{N}\,{}^{\beta}\overset{-n+1}{N}$ statt $(\beta-1)\,{}^{\alpha}\overset{-2}{N}\,{}^{\beta}\overset{n+1}{N}$.

Zeile 3 von unten lies: Substituirt man zufolge §. 50. statt ${}^{\beta}\overset{-n+1}{\mathfrak{N}}$ den Werth ${}^{\beta}\mathfrak{A}$ und setzt für ${}^{\beta}\overset{-n}{\mathfrak{N}}$ den Werth 1.

Zu §. 54.

Seite 61 Zeile 6 von oben lies: $1\,{}^{\beta}N + {}^{\alpha}\mathfrak{A}\,{}^{\beta}\overset{-1}{N} + {}^{\alpha}\mathfrak{B}\,{}^{\beta}\overset{2}{N}$ ...... statt $1\,{}^{\beta}N + {}^{\alpha}\mathfrak{A}\,{}^{\beta}N + {}^{\alpha}\mathfrak{B}\,{}^{\beta}N$....

Zu §. 57.

Es ist nämlich ${}^{7}\mathfrak{F}$ der 6te Coefficient der 7ten Reihe $= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 7$; ${}^{9}\mathfrak{A}$ der erste Coefficient der 9ten Reihe $= 9$, ${}^{7}\mathfrak{E}$ der 5te Coefficient der 7ten Reihe $= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 21$, also ${}^{9}\mathfrak{A}\,{}^{7}\mathfrak{E} = 9.21$; ${}^{9}\mathfrak{B}$ ist der 2te Coefficient der 9ten Reihe $= \frac{9 \cdot 8}{1 \cdot 2} = 36$,

und ${}^{7}\mathfrak{D}$ ist der 4te Coefficient der 7ten Reihe $= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 35$, also ${}^{9}\mathfrak{B}\ {}^{7}\mathfrak{D} = 36 \cdot 35$ u. s. w.

Zu §. 65.

Seite 65 Zeile 4 von unten ist vor den Worten: Es ist aber, einzuschalten: Setzt man nun $(1+z)^n$ statt ${}^{n}S$, so erhält man:

$$\left((1+z)^n\right)^{\frac{1}{m}} = (1+z)^{\frac{n}{m}} = 1 + {}^{\frac{n}{m}}\mathfrak{A}z + {}^{\frac{n}{m}}\mathfrak{B}z^2 + {}^{\frac{n}{m}}\mathfrak{C}z^3$$

u. s. w.

Zu §. 69.

Man setze in §. 67. $-\frac{n}{m}$ statt $-n$; so ist

$$(1+z)^{-\frac{n}{m}} = 1 + {}^{-\frac{n}{m}}\mathfrak{A}z + {}^{-\frac{n}{m}}\mathfrak{B}z^2\ {}^{-\frac{n}{m}}\mathfrak{C}z^3 \ldots\ldots$$

Es ist aber

$${}^{-\frac{n}{m}}\mathfrak{A} = \frac{-\frac{n}{m}}{1} = -\frac{n}{m}$$

$${}^{-\frac{n}{m}}\mathfrak{B} = \frac{-\frac{n}{m} \cdot -\frac{n}{m} - 1}{1 \cdot 2} = \frac{\frac{n}{m} \cdot \frac{n}{m} + 1}{1 \cdot 2} = \frac{n \cdot n + m}{m \cdot 2m}$$

$${}^{-\frac{n}{m}}\mathfrak{C} = \frac{-\frac{n}{m} \cdot -\frac{n}{m} - 1 \cdot -\frac{n}{m} - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} = -\frac{\frac{n}{m} \cdot \frac{n}{m} + 1 \cdot \frac{n}{m} + 2}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$= -\frac{n \cdot n + m \cdot n + 2m}{m \cdot 2m \cdot 3m}$$ u. s. w., also

$$(1+z)^{-\frac{n}{m}} = 1 - \frac{n}{m}z + \frac{n \cdot n + m}{m \cdot 2m}z^2 - \frac{n \cdot n + m \cdot n + 2m}{m \cdot 2m \cdot 3m}z^3 \ldots$$

$$\pm \frac{n \cdot n + m \ldots\ldots (n + (r-1)m)}{m \cdot 2m \ldots\ldots rm} z^r$$ u. s. w.

Nun ist $(a+b)^{-\frac{n}{m}} = a^{-\frac{n}{m}} . \left(1+\frac{b}{a}\right)^{-\frac{n}{m}}$; der Werth aber für $\left(1+\frac{b}{a}\right)^{-\frac{n}{m}}$ ergiebt sich aus dem so eben Vorgetragenen, wenn man statt z setzt $\frac{b}{a}$.

Es ist:

$$\left(1+\frac{b}{a}\right)^{-\frac{n}{m}} = 1 - \frac{n}{m} . \frac{b}{a} + \frac{n.n+m}{m.\,2m} . \frac{b^2}{a^2} - \frac{n.n+m.n+2m}{m\,.\,2m\,.\,3m} . \frac{b^3}{a^3} ..$$

multiplicirt man jedes Glied mit $a^{-\frac{n}{m}}$, so erhält man

$$(a+b)^{-\frac{n}{m}} = a^{-\frac{n}{m}} - \frac{n}{m} a^{-\frac{n}{m}-1} b + \frac{n.n+m}{m\,.\,2m} a^{-\frac{n}{m}-2} b^2$$

u. s. w.

Zu §. 70.

Lies $(1-z)^{-\frac{1}{2}}$ statt $(1=z)^{-\frac{1}{2}}$.

$$(1+z)^{\frac{1}{2}} = 1 + \tfrac{1}{2}z + \frac{\frac{1}{2}.\frac{1}{2}-1}{1\,.\,2} z^2 + \frac{\frac{1}{2}.\frac{1}{2}-1.\frac{1}{2}-2}{1\,.\,2\,.\,3} z^3 + \frac{\frac{1}{2}.\frac{1}{2}-1.\frac{1}{2}-2.\frac{1}{2}-3}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} z^4 \ldots$$

$$= 1 + \tfrac{1}{2}z + \frac{1.1-2}{2\,.\,4} z^2 + \frac{1.1-2.1-4}{2\,.\,4\,.\,6} z^3 + \frac{1.1-2.1-4.1-6}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8} z^4 \ldots$$

$$= 1 + \tfrac{1}{2}z + \frac{1.-1}{2\,.\,4} z^2 + \frac{1.-1.-3}{2\,.\,4\,.\,6} z^3 + \frac{1.-1.-3.-5}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8} z^4 \ldots$$

$$= 1 + \tfrac{1}{2}z - \frac{1}{2\,.\,4} z^2 + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4\,.\,6} z^3 + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8} z^4 \ldots$$

$$(1+z)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$1 - \tfrac{1}{2}z + \frac{-\frac{1}{2}.-\frac{1}{2}-1}{1\,.\,2} z^2 + \frac{-\frac{1}{2}.-\frac{1}{2}-1.-\frac{1}{2}-2}{1\,.\,2\,.\,3} z^3 + \frac{-\frac{1}{2}.-\frac{1}{2}-1.-\frac{1}{2}-2.-\frac{1}{2}-3}{1\,.\,2\,.\,3} z^4 \ldots$$

$$= 1 - \tfrac{1}{2}z + \frac{-1.-1-2}{2\,.\,4} z^2 + \frac{-1.-1-2.-1-4}{2\,.\,4\,.\,6} z^3 + \frac{-1.-1-2.-1-4.-1-6}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8} z^4 \ldots$$

$$= 1 - \tfrac{1}{2}z + \frac{-1.-3}{2\,.\,4} z^2 + \frac{-1.-3.-5}{2.4.6} z^3 + \frac{-1.-3.-5.-7}{2.4.6.8} z^4 \ldots$$

$$= 1 - \tfrac{1}{2}z + \frac{1.3}{2.4} z^2 - \frac{1.3.5}{2.4.6} z^3 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} z^4 \ldots$$

$$(1+z)^{\frac{1}{3}} = 1 + \tfrac{1}{3}z + \frac{\frac{1}{3}.\frac{1}{3}-1}{1\,.\,2}z^2 + \frac{\frac{1}{3}.\frac{1}{3}-1.\frac{1}{3}-2}{1\,.\,2\,.\,3}z^3 + \frac{\frac{1}{3}.\frac{1}{3}-1.\frac{1}{3}-2.\frac{1}{3}-3}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}z^4.$$

$$= 1 + \tfrac{1}{3}z + \frac{1.1-3}{3\,.\,6}z^2 + \frac{1.1-3.1-6}{3\,.\,6\,.\,9}z^3 + \frac{1.1-3.1-6.1-9}{3\,.\,6\,.\,9\,.\,12}z^4 \ldots\ldots$$

$$= 1 + \tfrac{1}{3}z + \frac{1.-2}{3.\,6}z^2 + \frac{1.-2.-5}{3.6.9}z^3 + \frac{1.-2.-5.-8}{3.6.9.12}z^4 \ldots\ldots$$

$$= 1 + \tfrac{1}{3}z - \frac{1.2}{3.6}z^2 + \frac{1.2.5}{3.6.9}z^3 - \frac{1.2.5.8}{3.6.9.12}z^4 \ldots\ldots$$

$$(1+z)^{-\frac{1}{3}} = 1 - \tfrac{1}{3}z \frac{-\frac{1}{3}.-\frac{1}{3}-1}{1\,.\,2}z \frac{-\frac{1}{3}.-\frac{1}{3}-1.-\frac{1}{3}-2}{1\,.\,2\,.\,3}z^3 \frac{-\frac{1}{3}.-\frac{1}{3}-1.-\frac{1}{3}-2.-\frac{1}{3}-3}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}z^4 \ldots$$

$$= 1 - \tfrac{1}{3}z + \frac{-1.-1-3}{3\,.\,6}z^2 + \frac{-1.-1-3.-1-6}{3\,.\,6\,.\,9}z^3 + \frac{-1.-1-3.-1-6.-1-9}{3\,.\,6\,.\,9\,.\,12}z^4 \ldots\ldots$$

$$= 1 - \tfrac{1}{3}z + \frac{-1.-4}{3\,.\,6}z^2 + \frac{-1.-4.-7}{3\,.\,6.9}z^3 + \frac{-1.-4.-7.-10}{3.6.9.12}z^4 \ldots\ldots$$

$$= 1 - \tfrac{1}{3}z + \frac{1.4}{3.6}z^2 - \frac{1.4.7}{3.6.9}z^3 + \frac{1.4.7.10}{3.6.9.12}z^4 \ldots\ldots$$

$$(1-z)^{\frac{1}{2}} =$$

$$1 + \tfrac{1}{2}.-z + \frac{\frac{1}{2}.\frac{1}{2}-1}{1\,.\,2}(-z)^2 + \frac{\frac{1}{2}.\frac{1}{2}-1.\frac{1}{2}-2}{1\,.\,2\,.\,3}(-z)^3 + \frac{\frac{1}{2}.\frac{1}{2}-1.\frac{1}{2}-2.\frac{1}{2}-3}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}(-z)^4 \ldots$$

$$= 1 - \tfrac{1}{2}z + \frac{1.1-2}{2\,.\,4}z^2 + \frac{1.1-2.1-4}{2\,.\,4\,.\,6} - z^3 + \frac{1.1-2.1-4.1-6}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8}z^4 \ldots\ldots$$

$$= 1 - \tfrac{1}{2}z + \frac{1.-1}{2.4}z^2 + \frac{1.-1.-3}{2.4.6}z^3 - \frac{1.-1.-3.-5}{2.4.6.8}z^4 \ldots\ldots$$

$$= 1 - \tfrac{1}{2}z - \frac{1}{2.4}z^2 - \frac{1.3}{2.4.6}z^3 - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}z^4 \ldots\ldots$$

$$(1-z)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$1 - \tfrac{1}{2}.-z + \frac{-\frac{1}{2}.-\frac{1}{2}-1}{1\,.\,2}(-z)^2 + \frac{-\frac{1}{2}.-\frac{1}{2}-1.-\frac{1}{2}-2}{1\,.\,2\,.\,3}(-z)^3 + \frac{-\frac{1}{2}.-\frac{1}{2}-1.-\frac{1}{2}-2.-\frac{1}{2}-3}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}(-z)^4.$$

$$= 1 + \tfrac{1}{2}z + \frac{-1.-1-2}{2\,.\,4}z^2 + \frac{-1.-1-2.-1-4}{2\,.\,4\,.\,6} - z^3 + \frac{-1.-1-2.-1-4.-1-6}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8}z^4 \ldots\ldots$$

$$= 1 + \tfrac{1}{2}z + \frac{-1.-3}{2.4}z^2 + \frac{-1.-3.-5}{2.4.6} - z^3 + \frac{-1.-3.-5.-7}{2.4.6.8}z^4 \ldots\ldots$$

$$= 1 + \tfrac{1}{2}z + \frac{1.3}{2.4}z^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}z^3 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}z^4 \ldots\ldots$$

Zu §. 71.

Seite 68 Zeile 1 von unten lies $a^m - b = a^m (1-z)$.

Zu §. 73.

Seite 70 Zeile 1 von unten lies $=\sqrt{5}$ statt $=N$.

Zu §. 75.

Anwendung des zu Ende des §. Gesagten auf die Cubicwurzeln.

Aus den Ordnungen $\dot{9}, \dot{6}, \dot{3}, \dot{0}, -\dot{3}, -\dot{6}$ u. s. w. (d. h. Aus den Tausend-Millionen, Millionen, Tausenden, Einern, Tausendteln, Millionenteln u. s. w.) sind die Cubicwurzeln ohne weitere Auflösung anzugeben; soll man aber z. B. aus den Ordnungen $\dot{8}$ und $\dot{7}$ die Cubicwurzel ziehen, so müssen sie in die Ordnung $\dot{6}$ (die Hundert Millionen und die Zehn Millionen müssen in Millionen) aufgelöst werden; eben so sind die $-\dot{1}$ und $-\dot{2}$ in $-\dot{3}$ (die Zehntel und Hundertel in Tausendtel) aufzulösen.

Zu §. 78.

Auflösung der Gleichung $\frac{b^2}{4a^2} - 2ay = 0$ zu Ende des §.

$$\frac{b^2}{4a^2} - 2ay = 0$$

$$\frac{b^2}{4a^2} = 2ay$$

$$2a) \quad \frac{b^2}{8a^3} = y$$

Zu §. 79.

Auflösung der Aufgabe zu Ende dieses §.

Die Frage ist: welches ist die höchste Ordnung von $\frac{b^2}{8a^3}$, wenn a aus 4 Ziffern besteht, wovon die letzte zur rechten zur Ordnung $\dot{5}$ gehört?

Unter diesen Umständen ist die höchste Ordnung von a $\dot{8}$. Da man nun $\frac{b^2}{8a^3}$ den größtmöglichsten Werth geben und folglich b^2 so groß als möglich setzen muß, so nehme man an, b sey $=2a$, so wird es höchstens 5 Ziffern haben können, wenn a deren 4 hat, in diesem Fall nimmt man an, die erste Ziffer von a sey wenigstens 5. Es frägt sich zuvörderst, zu welcher Ordnung gehört von b die letzte Ziffer zur rechten? Da b als Rest durch die Subtraction von a^2 erhalten wird, so gehört sie zu eben der Ordnung, wozu die letzte Ziffer im Quadrat von a gehört, d. h. zur Ordnung $\dot{10}$, folglich wird, da b aus 5 Ziffern bestehen soll, die höchste Ordnung davon $\dot{14}$ seyn müssen. Die höchste Ordnung von b^2 ist daher $\dot{28}$. Da wir angenommen haben $b^2=2a$ enthalte eine Ziffer mehr wie a, so kann die Ziffer der höchsten Ordnung nur 1 seyn und man also beim Quadriren von b nicht für die höchste Ordnung eine Doppelziffer (nicht Zehner der höchsten Ordnung sondern nur Einer) erhalten; denn die folgende Ziffer könnte höchstens 9 seyn, aber selbst 20 giebt im Quadrat nur 3 Ziffern, wovon eine von der 2 herrührt; also muß dies um so mehr seyn, wenn 1 den Anfang macht.

Jetzt muß man die höchste Ordnung von $8a^3$ bestimmen. $8a^3$ ist $= (2a)^3$. Oben nahmen wir an, 2a solle aus 5 Ziffern bestehen, also wird da die höchste Ordnung von a, welches nur aus 4 Ziffern besteht, $\dot{8}$ ist, die höchste Ordnung von 2a $\dot{9}$ seyn; folglich wird die höchste Ordnung von $(2a)^3$, zur Ordnung $\dot{27}$ gehören. Es frägt sich nur noch, ob in die höchste Ordnung nur eine oder mehrere Ziffern kommen (ob zu der höchsten Ordnung nur Einer oder auch Zehner und Hunderte gehören). Wenn man annimmt 2a enthalte eine Ziffer mehr als a, so kann die Ziffer der höchsten Ordnung nur 1 seyn; die folgende Ziffer kann höchstens 9 seyn; da nun 20 im Cubus nur 4 Ziffern giebt, also für die höchste Ordnung nur eine, so kann, was man auch nach 1 in der höchsten Ordnung für Ziffern folgen läßt, der Cubus für die höchste Ordnung selbst nur eine Ziffer geben und also $(2a)^3$ in der höchsten Ordnung nur $\dot{27}$ seyn.

Hieraus folgt endlich daß $\frac{b^2}{8a^3}$ zur Ordnung $\dot{28}-\dot{27}$ d. h. zur Ordnung $\dot{1}$ gehört; folglich ist die auf dem Wege der Division gefundene Quadratwurzel bis $\dot{2}$ richtig; da nun die letzte Ziffer von a zur Ordnung $\dot{5}$ gehörte, so wird man von dem durch die Division gefundenen Werthe noch 3 Ziffern, also eine weniger als man schon in a hatte, als richtig brauchen können.

Zu §. 83.

Es ist nämlich $7{,}0710678^2 = 49{,}99999832196 84$, zieht man dies von 50 ab, so bleibt 0,00000016,80316.

Dividirt man dies durch die doppelte gefundene Wurzel 14,1421356, so erhält man als Zusatz zu dem Gefundenen 1186547.

Zu §. 85.

Will man die aus 63 gefundene Quadratwurzel 7,937 weiter fortsetzen; so findet man $63-7{,}937^2 = 63-62{,}995969 = 0{,}004031$; dies durch $2 \times 7{,}937 = 15{,}874$ dividirt giebt als Zusatz die drei Decimalbruchstellen 253. Subtrahirt man $7{,}937253^2$ von 63, und dividirt den Rest durch $2 \times 7{,}937253$, so erhält man 6 neue Decimalbruchstellen.

Hat man die Tafeln der Quadratwurzeln zur Hand, so geben diese schon $\sqrt{63} = 7{,}9372539$ wo man nun auf dem angegebenen Wege leicht die Wurzel fortsetzen kann.

Der §. enthält noch die Aufgabe: Man soll aus 99 die Quadratwurzel ziehen. Wir wollen hierbei von den Tafeln Gebrauch machen. Sie sagen uns $\sqrt{99} = 9{,}9498744$. Quadrirt man diese Zahl, so findet man sie giebt 99,0000005757536; b wird also hier negativ; es ist — 0,0000005757536, dividirt man dies durch $2 \times 9{,}9498744 = 19{,}8997488$, so erhält man $-0{,}00000002893380$, so daß also

$$\sqrt{99} = 9{,}94987437106620.$$

Wollte man b plus haben, so hätte man die letzte Decimalbruchstelle um 1 kleiner machen und also $\sqrt{99} = 9{,}9498743$ setzen müssen, wo man denn bei fortgesetzter Operation dasselbe Resultat erhalten haben würde.

Der Leser wird uns der Mühe überheben, die Operation hier selbst vorzunehmen.

Zu §. 87.

Seite 85 Zeile 2 von unten lies $-\frac{5x^4}{128}$ statt $=\frac{5x^4}{128}$.

Zu §. 89.

Man findet $\sqrt{\left(1+\frac{b}{a}\right)}$ aus §. 86., wenn man in dem dort gefundenen Werth von $\sqrt{1+x}$ für x setzt $\frac{b}{a}$.

Es ist demnach $\sqrt{\left(1+\frac{b}{a}\right)}=1+\frac{b}{2a}-\frac{b^2}{8a^2}+\frac{b^3}{16a^2}-\frac{5b^4}{128a^4}\ldots$;

folglich $\sqrt{a+b}=\sqrt{\left(1+\frac{b}{a}\right)}.\sqrt{a}=\left(1+\frac{b}{2a}-\frac{b^2}{8a^2}+\frac{b^3}{16a^3}-\frac{5b^4}{128a^4}\ldots\ldots\right)\sqrt{a}$.

Zu §. 90.

Man setze in dem §. 53. gefundenen Werth von $\sqrt{\left(1+\frac{b}{a}\right)}$, m statt b und statt a setze man a^2, so ist

$$\sqrt{\left(1+\frac{m}{a^2}\right)}=1+\frac{m}{2a^2}-\frac{m^2}{8a^4}+\frac{m^3}{16a^6}-\frac{5m^4}{128a^8}\ldots\ldots$$

folglich ist

$$\sqrt{a^2+m}=a\sqrt{\left(1+\frac{m}{a^2}\right)}=a+\frac{m}{2a}-\frac{m^2}{8a^3}+\frac{m^3}{16a^5}-\frac{5m^4}{128a^7}\ldots\ldots$$

Zu §. 91.

Man hat nur nöthig, in dem im vorigen §. gefundenen Werth statt $+m$ zu setzen $-m$ und man erhält

$$\sqrt{(a^2-m)}=a-\frac{m}{2a}-\frac{m^2}{8a^3}-\frac{m^3}{16a^5}-\frac{5m^4}{128a^7}.$$

Zu §. 93.

Zöge man unmittelbar aus 2, als 1+1 die Quadratwurzel aus, so erhielte man $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{5}{128} \ldots$ $= 1,3906255$.

Dividirt man $\sqrt{50}$ durch 5, so erhält man $\sqrt{2} =$ $1,414213562$.

Zu §. 94.

$\sqrt{63} = \sqrt{8^2 - 1}$, also nach §. 91.

$$\sqrt{63} = 8 - \frac{1}{16} - \frac{1}{4096} - \frac{1}{524288} - \frac{5}{268435456}$$

$$= 8 - \frac{16843269}{268435456} = 8 - 0,062740666 = 7,937259334.$$

Zu §. 96.

Seite 91 Zeile 2 von unten lies -216 statt $=216$.

$$\begin{array}{l|l}
 & x - 6 \\ \hline
x^3 - 216 & x^2 + 6x + 36 \\
x^3 - 6x^2 & \\
- \quad + & \\ \hline
\quad 6x^2 - 216 & \\
\quad 6x^2 - 36x & \\
\quad - \quad + & \\ \hline
\qquad 36x - 216 & \\
\qquad 36x - 216 & \\
\qquad - \quad + & \\ \hline
\end{array}$$

Auflö-

Auflösung der Gleichung $x^3 - 216 = 0$.

$$x^3 - 216 = 0$$

$$x^2 - 6)\; x^2 + 6x + 36 = 0$$

$$x^2 + 6x = -36$$

$$x^2 + 6x + 9 = -27$$

$$x + 3 = \pm\sqrt{-27}$$

$$x = -3 \pm \sqrt{-27}$$

Vergleiche Lehrbuch Arithmetik §. 195.

Darstellung durch die gewöhnliche Multiplication daß $(-3+\sqrt{-27})^3 = 216$.

$$\begin{array}{l} -3+\sqrt{-27} \\ -3+\sqrt{-27} \\ \hline 9-3\sqrt{-27} \\ \quad -3\sqrt{-27}-27 \\ \hline 9-6\sqrt{-27}-27 = -18-6\sqrt{-27} \\ -18-6\sqrt{-27} \\ -\;3+\sqrt{-27} \\ \hline 54+18\sqrt{-27} \\ \quad -18\sqrt{-27}-6.-27 \\ \hline 54 \qquad\qquad -6.-27 = 54+162 = 216. \end{array}$$

Darstellung durch die gewöhnliche Multiplication daß $(-3-\sqrt{-27})^3 = 216$.

$$\begin{array}{l} -3-\sqrt{-27} \\ -3-\sqrt{-27} \\ \hline 9+3\sqrt{-27} \\ \quad 3\sqrt{-27}-27 \\ \hline 9+6\sqrt{-27}-27 = -18+6\sqrt{-27} \\ -18+6\sqrt{-27} \\ -\;3-\sqrt{-27} \\ \hline 54-18\sqrt{-27} \\ \quad +18\sqrt{-27}-6.-27 \\ \hline 54 \qquad\qquad -6.-27 = 54+162 = 216. \end{array}$$

Man kann aber auch beide Werthe der Wurzel nach der binomischen Formel: $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$ cubiren.

$(-3+\sqrt{-27})^3 = -27 + 27\sqrt{-27} - 9 . -27 - 27\sqrt{-27} = -27 + 243 = 216.$

$(-3-\sqrt{-27})^3 = -27 - 27\sqrt{-27} - 9 . -27 + 27\sqrt{-27} = -27 + 243 = 216.$

Es macht vielleicht dem Leser Schwierigkeit, daß in dem letzten Fall $3ab^2 = -9 . -27$; zur Erläuterung diene daher $(-\sqrt{-27})^2 = -\sqrt{-27} . -\sqrt{-27} = +(\sqrt{-27})^2 = -27.$

Zu §. 97.

$$x^2 + ax + a^2 = 0$$

$$x^2 + ax = -a^2$$

$$x^2 + ax + \tfrac{1}{4} a^2 = -\tfrac{3}{4} a^2$$

$$x + \frac{a}{2} = \pm\sqrt{-\frac{3}{4} a^2} = \pm\sqrt{\frac{a^2}{4}} . \sqrt{-3} = \frac{\pm a . \sqrt{-3}}{2}$$

$$x = \frac{-a \pm a . \sqrt{-3}}{2}$$

Der §. bemerkt, daß dies zugleich die allgemeine Formel für die beiden unmöglichen Werthe einer Cubicwurzel ist. Macht man von dieser Formel für den §. 96. gegebenen Fall Gebrauch, so ist dort $a = 6$, und es wären also die beiden Werthe $\frac{-6 \pm 6 . \sqrt{-3}}{2} = -3 \pm 3\sqrt{-3}$. Dies scheint beim ersten Anblick mit den §. 45. gegebenen Werthen $-3 \pm \sqrt{-27}$ nicht übereinzustimmen; allein da $27 = 9 . -3$, so ist $\sqrt{-27} = \sqrt{9} . \sqrt{-3} = 3 . \sqrt{-3}.$

Der §. fordert ferner, man solle $\frac{-a+a\sqrt{-3}}{2}$ und $\frac{-a-a\sqrt{-3}}{2}$ cubiren; dies kann wiederum entweder durch die bloße Multiplication oder nach der binomischen Formel geschehen; um aber nicht zu weitläuftig zu werden, wollen wir den ersten Werth auf dem ersten, den andern auf dem andern Wege cubiren.

$$\begin{array}{l} -a+a\sqrt{-3} \\ -a+a\sqrt{-3} \\ \hline a^2-a^2\sqrt{-3} \\ \quad -a^2\sqrt{-3}+a^2.-3 \\ \hline a^2-2a^2\sqrt{-3}-3a^2=-2a^2-2a^2\sqrt{-3} \\ -2a^2-2a^2\sqrt{-3} \\ -a+a\sqrt{-3} \\ \hline 2a^3+2a^3\sqrt{-3} \\ \quad -2a^3\sqrt{-3}-2a^3.-3 \\ \hline 2a^3-2a^3.-3=2a^3+6a^3=8a^3. \end{array}$$

Also $\left(\frac{-a+a\sqrt{-3}}{2}\right)=\frac{8a^3}{8}=a^3.$

Cubirt man $\frac{-a-a\sqrt{-3}}{2}$ nach der binomischen Formel, so erhält man:

$$\frac{-a^3+(3a^2.-a\sqrt{-3})-(3a.a^2.-3)-a^3.-3.\sqrt{-3}}{8}=$$

$$\frac{-a^3-3a^3\sqrt{-3}+9a^3+3a^3\sqrt{-3}}{8}=\frac{8a^3}{8}=a^3.$$

Zu §. 98.

Auflösung der Aufgaben.

Die Cubicwurzeln von 512 sind: 8, $-4+4\sqrt{-3}$ und $-4-4\sqrt{-3}$.

Die Cubicwurzeln von 1 sind: 1, $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ und $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$.

Die Werthe von $\sqrt[3]{-1000}$ sind: -10, $5+5\sqrt{-3}$ und $5-5\sqrt{-3}$.

Die Werthe von $\sqrt[3]{125}$ sind: 5, $\frac{-5+5\sqrt{-3}}{2}$, $\frac{-5-5\sqrt{-3}}{2}$.

Anmerkung. Wir haben es für unnöthig gehalten, die Auflösungen selbst darzustellen; sie können dem aufmerksamen Leser durchaus keine Schwierigkeiten machen, wenn er das Vorhergehende gehörig eingesehen hat.

Zu §. 100.

Aus $a^3+b=a^3+b+\frac{b^2}{3a^3}+\frac{b^3}{27a^6}-3a^2z$ ergiebt sich wenn man in beiden Hälften der Gleichung a^3+b wegläßt $0=\frac{b^2}{3a^3}+\frac{b^3}{27a^6}-3a^2z$; hieraus folgt:

$$3a^2z=\frac{b^2}{3a^3}+\frac{b^3}{27a^6}$$

$$3a^2)\ \overline{\qquad\qquad\qquad}$$

$$z=\frac{b^2}{9a^5}+\frac{b^3}{81a^8}$$

Zu §. 103.

Auflösung der §. aufgestellten Aufgabe.

9|276|832|578|963|218|008 ⊥ 30102
9
———
276
(27)
———
276832
(2700)
2700
90
1
———
5931578
(271803)
———
5931578963
(27180300)
5436600
36120
8
———
495157755

Nun ist $3 \times 30102^2 = 2718391212$, dividirt man hierdurch den Rest 495157755218008, so bekommt man zum Zusatz 18,21, wovon also 18,2 als richtig der Wurzel hinzuzufügen, so daß diese = 3010218,2.

Zu §. 105.

Man soll aus 5 die Cubicwurzel ziehen.

Die Cubictafeln lehren, $171^3 = 5000211$, also $1{,}71^3 = 5{,}000211$; oder $\sqrt[3]{5} = 1{,}71 - u = 1{,}71 - \frac{0{,}000211}{3 \cdot 1{,}71^2}$ $= 1{,}71 - \frac{0{,}000211}{8{,}7723} = 1{,}71 - 0{,}9000240529 = 1{,}7099759471.$

Zu §. 106.

Seite 100 Zeile 3 von unten lies ein ächter Bruch statt ein Bruch.

Zu §. 108.

Auflösung der ersten Aufgabe.

Setzt man in der Formel $\sqrt[3]{(1+x)} = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x = \frac{1}{z}$; so erhält man:

$$\sqrt[3]{1+\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{3z} - \frac{1}{9z^2} + \frac{5}{81z^3} - \frac{10}{243z^4} \ldots\ldots$$

Folglich $\sqrt[3]{(z+1)} = \sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{z}\right)} \cdot \sqrt[3]{z} =$

$$\left(1 + \frac{1}{3z} - \frac{1}{9z^2} + \frac{5}{81z^3} - \frac{10}{243z^4} \ldots\ldots\right)\sqrt[3]{z}$$

Auflösung der zweiten Aufgabe.

$$\sqrt[3]{(z-1)} = \sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{z}\right)} \cdot \sqrt[3]{z} =$$

$$\left(1 - \frac{1}{3z} - \frac{1}{9z^2} - \frac{5}{81z^3} - \frac{10}{243z^4} \ldots\ldots\right)\sqrt[3]{z}.$$

Zu §. 109.

Auflösung der ersten Aufgabe.

$a+b = \left(1+\frac{b}{a}\right)a$; also $\sqrt[3]{(a+b)} = \sqrt[3]{\left(1+\frac{b}{a}\right)} \cdot \sqrt[3]{a}$.

Setzt man in der Formel

$$\sqrt[3]{(1+x)} = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243} \ldots\ldots$$

$x = \frac{b}{a}$; so ist $\sqrt[3]{\left(1+\frac{b}{a}\right)} = 1 + \frac{b}{3a} - \frac{b^2}{9a^2} + \frac{5b^3}{81a^3} - \frac{10b^4}{243a^4} \ldots$

Es ist folglich

$$\sqrt[3]{(a+b)} = \left(1 + \frac{b}{3a} - \frac{b^2}{9a^2} + \frac{5b^3}{81a^3} - \frac{10b^4}{243a^4} \ldots\ldots\right)\sqrt[3]{a}.$$

Auflösung der zweiten Aufgabe.

Es ist $a^3 + m = a^3 \cdot \left(1+\frac{m}{a^3}\right)$, daher $\sqrt[3]{(a^3+m)} = a\sqrt[3]{\left(1+\frac{m}{a^3}\right)}$. Nun ist aber $\sqrt[3]{\left(1+\frac{m}{a^3}\right)}$ aus der Auf-

lösung der vorigen Aufgabe leicht abzuleiten, wenn man b = m und statt a setzt a^3, es ist nämlich:

$$\sqrt[3]{\left(1+\frac{m}{a^3}\right)} = 1 + \frac{m}{3a^3} - \frac{m^2}{9a^6} + \frac{5m^3}{81a^9} - \frac{10m^4}{243a^{12}} \ldots\ldots$$

Hieraus ergiebt sich

$$\sqrt[3]{(a^3+m)} = a\sqrt[3]{\left(1+\frac{m}{a^3}\right)} = a + \frac{m}{3a^2} - \frac{m^2}{9a^5} + \frac{5m^3}{81a^8} - \frac{10m^4}{243a^{11}} \ldots\ldots$$

Auflösung der dritten Aufgabe.

Man setze in dem durch die Auflösung der vorigen Aufgabe gefundenen Werth $-m$ statt $+m$, so erhält man

$$\sqrt[3]{(a^3-m)} = a - \frac{m}{3a^2} - \frac{m^2}{9a^5} - \frac{5m^3}{81a^8} - \frac{10m^4}{243a^{11}} \ldots\ldots$$

Zu §. 111.

Auflösung der ersten Aufgabe.

$731 = 729 + 2 = 9^3 + 2$. Um also $\sqrt[3]{731}$ zu finden, dient die im vorigen §. gefundene Formel für $\sqrt[3]{(a^3+m)}$; es ist nämlich $\sqrt[3]{731} = 9 + \frac{2}{3 \cdot 9^2} - \frac{2^2}{9 \cdot 9^5} + \frac{5 \cdot 2^3}{81 \cdot 9^8} - \frac{10 \cdot 2^4}{243 \cdot 9^{11}} = 9 + \frac{2}{243} - \frac{4}{531441} + \frac{40}{3486784401} - \frac{160}{7625597484987}$.

$$\begin{aligned}
9 &= 9 \\
+\frac{2}{243} &= +\,0{,}008230452674897 \\
-\frac{4}{531441} &= -\,0{,}000007526705692 \\
+\frac{40}{3486784401} &= +\,0{,}000000011471903 \\
-\frac{160}{7625597484987} &= -\,0{,}000000000020980 \\
\hline
\sqrt[3]{731} &= 9{,}008222937420128.
\end{aligned}$$

Auflösung der zweiten Aufgabe.

$$\sqrt[3]{63} = \sqrt[3]{4^3 - 1} = 4 - \frac{1}{3.4^2} - \frac{1}{9.4^5} - \frac{5}{81.4^8} - \frac{10}{243.4^{11}} =$$

$$4 - \frac{1}{48} - \frac{1}{9216} - \frac{5}{5308416} - \frac{10}{1019215872} =$$

$$4 - 0{,}0209427919 = 3{,}9790572081.$$

Zu §. 112.

$$\sqrt[3]{(1+x)} = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9}.$$

Setzt man statt x die Zahl 0,00000247878 so ist

$$1 = 1$$

$$\frac{x}{3} = 0{,}00000082626333$$

$$-\frac{x^2}{9} = -0{,}00000000000066$$

$$\sqrt[3]{(1+x)} = 1{,}00000082626267$$

Zu §. 113.

$1,\ 1\tfrac{1}{4},\ 1\tfrac{1}{2},\ 1\tfrac{3}{4},\ 2,\ 2\tfrac{1}{4},\ 2\tfrac{1}{2},\ 2\tfrac{3}{4},\ 3$
5, 10, 20, 40, 80, 160, 320, 640, 1280,

$3\tfrac{1}{4}\quad 3\tfrac{1}{2}\quad 3\tfrac{3}{4}\quad 4$
2560, 5120, 10240, 20480.

Beantwortung der im §. aufgeworfenen Frage.

Es heiße ν die Anzahl der eingeschalteten Glieder (sie ist der Nenner des Bruchs von n weniger 1), δ heiße die Differenz derselben, d die Differenz der Hauptreihe, so ist $\delta = \frac{d}{\nu + 1}$. Es heiße der Nenner des Bruchs m,

so ist $\delta = \frac{d}{m}$. Sucht man z. B. das Glied einer arithmetischen Reihe wozu $2\frac{5}{6}$ als Anzeiger (n) gehört, so ist $\delta = \frac{d}{6}$, und man nimmt sodann von den eingeschalteten Gliedern das 5te.

Ist hingegen von geometrischen Reihen die Rede, so heiße ε der Exponent der eingeschobenen Glieder und e der Exponent der Hauptreihe, ν die Anzahl der eingeschobenen Glieder, so ist, wenn n positiv, $\varepsilon = \sqrt[\nu+1]{e} = \sqrt[m]{e}$, wenn m der Nenner des Bruchs ist. Sucht man z. B. in der Reihe wo $a=5$, $e=16$, das Glied wozu der Anzeiger $3\frac{3}{4}$ gehört, so findet man $\varepsilon = \sqrt[4]{16} = 2$; es ist das Glied also 10240.

1	2	3	$3\frac{1}{4}$	$3\frac{1}{2}$	$3\frac{3}{4}$	4
5,	80,	1280,	2560,	5120,	10240,	20480.

Zu §. 114.

Ist n negativ und Anzeiger für eine arithmetische Hauptreihe, so zeigt dies an, daß man die Reihe aufwärts steigen soll, dann muß man die entgegengesetzte Differenz der Hauptreihe durch ν dividiren und die eingeschalteten Glieder auch aufwärts zählen. Man sucht in der Reihe, wo $a=8$, $d=4$, das Glied was $-2\frac{3}{5}$ zum Anzeiger hat, so soll man zwischen den durch -2 und -3 bezeichneten Gliedern der Hauptreihe 5 Glieder einschalten und von diesen das dritte, aber von -2 nach -3 zu zählend, nehmen. Hier ist $\delta = \frac{-d}{5} = \frac{-4}{5}$. Die Reihe wäre

-3	$-2\frac{4}{5}$	$-2\frac{3}{5}$	$-2\frac{2}{5}$	$-2\frac{1}{5}$	-2	-1	0	1	2
-8,	$-7\frac{1}{5}$,	$-6\frac{2}{5}$,	$-5\frac{3}{5}$,	$-4\frac{4}{5}$,	-4,	0,	4,	8,	12.

Ist n negativ und Anzeiger für eine geometrische Hauptreihe, so muß man die Reihe **aufwärts** steigen, und jegliches Glied mit $\frac{1}{e}$ multipliciren, um das Folgende zu erhalten; nennt man ferner den Exponenten der eingeschobenen Glieder gleichfalls ε und ist m Nenner des Bruchs im Anzeiger, so ist $\varepsilon = \sqrt[m]{\frac{1}{e}} = \frac{1}{\sqrt[m]{e}}$.

Zu §. 116.

Auflösung der im §. befindlichen Aufgaben.

1. $u = a + (n - 1)\,d = 6 + (-4 - 1)3 = 6 - 15 = -9$

$$-4 \quad -3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1$$
$$-9, \ -6, \ -3, \ 0, \ 3, \ 6$$

2. $u = -10 + (2\frac{4}{5} - 1).6 = 10 + 1\frac{4}{5}.6 - \frac{4}{5}$

$$1 \quad 2 \quad 2\frac{1}{5} \quad 2\frac{2}{5} \quad 2\frac{3}{5} \quad 2\frac{4}{5} \quad 3$$
$$-10, \ -4, \ -2\frac{4}{5}, \ -1\frac{3}{5}, \ -\frac{2}{5}, \ +\frac{4}{5}, \ 2$$

3. $u = 4 + (-4^{1}). -7 = 4 + 29\frac{3}{4} = 33\frac{3}{4}$

$$-4 \quad -3\frac{3}{4} \quad -3\frac{1}{2} \quad -3\frac{1}{4} \quad -3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2$$
$$39, \ 37\frac{1}{4}, \ 35\frac{1}{2}, \ 33\frac{3}{4}, \ 32, \ 25, \ 18, \ 11, \ 4, \ -3$$

4. $u = 5 + (0 - 1). -14 = 5 + -1. -14 = 5 + 14 = 19$

$$0 \quad 1 \quad 2$$
$$19, \ 5, \ -11$$

5. $u = 3\frac{5}{6} + (-\frac{2}{3} - 1). -\frac{1}{4} = 3\frac{5}{6} + 1\frac{2}{3}.\frac{1}{4} = 3\frac{5}{6} + \frac{5}{12} = 4\frac{1}{4}$

$$-1 \quad -\frac{2}{3} \quad -\frac{1}{3} \quad 0 \quad 1 \quad 2$$
$$4\frac{1}{3}, \ 4\frac{1}{4}, \ 4\frac{1}{6}, \ 4\frac{1}{12}, \ 3\frac{5}{6}, \ 3\frac{7}{12}$$

6. $u = -100 + (\frac{1}{8} - 1).4 = -100 - \frac{7}{8}.4 = -103\frac{1}{2}$

$$0 \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{3}{8} \quad \frac{4}{8} \quad \frac{5}{8} \quad \frac{6}{8} \quad \frac{7}{8} \quad 1 \quad 2$$
$$-104, -103\frac{1}{2}, -103, -102\frac{1}{2}, -102, -101\frac{1}{2}, -101, -100\frac{1}{2}, -100, -96$$

Zu §. 117.

Wir haben in den Erläuterungen zu §. 113. und 114. dargethan, wie man bei geometrischen Progressio=

nen zu positiven und negativen, ganzen und gebrochenen Anzeigern gelangt.

Um zu sehen, ob die im Lehrbuch Arithmetik §. 139. gefundene Formel $u = ae^{n-1}$, auch für negative n paßt, wollen wir eine geometrische Reihe aufstellen.

$$-n \ldots\ldots -2 \; -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \;\ldots\; n$$

$$\frac{a}{e^{n+1}} \ldots\ldots, \frac{a}{e^3}, \frac{a}{e^2}, \frac{a}{e}, a, ae, ae^2 \ldots ae^{n-1}$$

Nennt man nun den Exponenten der abwärts gehenden Hauptreihe e^1, so ist der Exponent der aufwärts gehenden e^{-1} oder $\frac{1}{e}$ (s. Lehrbuch Arithmetik §. 154); so ist $ae^{-n-1} = a.\frac{1}{e^{n+1}} = \frac{a}{e^{n+1}}$; die Formel $u = ae^{n-1}$ ist also passend, sowohl für positive als negative n.

Jetzt kommt es nur noch darauf an zu zeigen, daß n auch ein Bruch oder eine ganze Zahl und ein Bruch seyn kann. Es sey $a = 5$, $e = 27$, $n = 4\frac{2}{3}$, so ist die Hauptreihe

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5, & 135, & 2745, & 98415, & 2657205. \end{matrix}$$

$n = 4\frac{2}{3}$ sagt, es sollen zwischen 98415 und 2657205 noch 2 Glieder eingeschoben werden, und davon solle man das 2te Glied nehmen. Nach §. 113. Erläuterungen findet man $\varepsilon = \sqrt[m]{e} = \sqrt[3]{27} = 3$; die Einschaltung wäre also

$$\begin{matrix} 4 & 4\frac{1}{3} & 4\frac{2}{3} & 5 \\ 98415, & 295245, & 885735, & 2657205. \end{matrix}$$

Der Formel $u = ae^{n-1}$ nach wäre hier $u = 5.27^{4\frac{2}{3}-1} = 5.27^{3\frac{2}{3}} = 5.27^3.27^{\frac{2}{3}} = 5.27^3.\sqrt[3]{27^2} = 5.19863.9 = 885735.$

Gesetzt man suchte von der geometrischen Reihe wo

$a = 81$, $e = 27$ das Glied dessen Anzeiger $\frac{2}{3}$; so wäre $u = ae^{n-1} = ae^{\frac{2}{3}-1} = ae^{-\frac{1}{3}} = a.\frac{1}{e^{\frac{1}{3}}} = a.\frac{1}{\sqrt[3]{e}} = \frac{a}{\sqrt[3]{e}}. = \frac{81}{\sqrt[3]{27}} = \frac{81}{3} = 27.$

$$\begin{matrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & 2 \\ 3, & 9, & 27, & 81, & 2187 \end{matrix}$$

Wollte man das Glied nach der Formel von ε finden, so ist $\varepsilon = \sqrt[3]{27} = 3$, dadurch würden sich die zwischen den durch die Anzeiger 0 und 1 einzuschaltenden Glieder 9 und 27 ergeben, von welchen es das zweite ist.

Suchte man endlich in der geometrischen Reihe, wo $a = 64$, $e = 16$, das Glied dessen Anzeiger -2, so gäbe die Formel $u = ae^{n-1} = 64 . 16^{-3} = 64 . \frac{1}{16^3} = \frac{64}{4096} = \frac{1}{64}$.

$$\begin{matrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{64}, & \frac{1}{4}, & 4, & 64, & 1004 \end{matrix}$$

Gesetzt endlich man suchte von derselben geometrischen Reihe das Glied, welches zum Anzeiger $-1\frac{1}{2}$ hat, dies wäre also zwischen dem von -1 und -2 oder zwischen $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{64}$ mitten inne liegend; ε wäre für diesen Fall $\sqrt{\frac{1}{e}} = \sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4}$ und also das verlangte Glied $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$.

$$\begin{matrix} -2 & -1\frac{1}{2} & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{64}, & \frac{1}{16}, & \frac{1}{4}, & 4, & 64, & 1004 \end{matrix}$$

Dasselbe Resultat giebt die Formel $u = ae^{n-1} = 64 . 16^{-1\frac{1}{2}-1} = 64 . 16^{-2\frac{1}{2}} = 64 . \frac{1}{16^{2\frac{1}{2}}} = 64 . \frac{1}{16^2 . \sqrt{16}} = \frac{64}{16^2 \sqrt{16}} = \frac{64}{256 . 4} = \frac{64}{1024} = \frac{1}{16}.$

Zu §. 119.

Auflösung der Aufgaben.

1. $u = ae^{n-1} = 4 \cdot 5^{-4} = 4 \cdot \frac{1}{5^4} = \frac{4}{625}$.

$$\begin{matrix} -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \frac{4}{625}, & \frac{4}{125}, & \frac{4}{25}, & \frac{4}{5}, & 4, & 20 \end{matrix}$$

2. $u = -10 \cdot (\frac{1}{2})^{-5} = -10 \cdot \frac{1}{(\frac{1}{2})^5} = -10 \cdot \frac{1}{\frac{1}{32}} = -320$.

$$\begin{matrix} -4 & -3 & -2 & -1 & -0 & 1 & 2 \\ -320, & -160, & -80, & -40, & -20, & -10, & -5 \end{matrix}$$

3. $u = 144 \cdot 2^{\frac{3}{4}-1} = 144 \cdot 2^{-\frac{1}{4}} = 144 \cdot \frac{1}{2^{\frac{1}{4}}} = 144 \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{2}} = \frac{144}{\sqrt[4]{2}}$

$$\begin{matrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 1 & 2 \\ \frac{144}{2}, & \frac{144}{\sqrt[4]{}\cdot\sqrt[4]{}\cdot\sqrt[4]{2}}, & \frac{144}{\sqrt[4]{}\cdot\sqrt[4]{2}}, & \frac{144}{\sqrt{2}}, & 144, & 288. \end{matrix}$$

4. $u = 144 \cdot 8^{2\frac{2}{3}} = 144 \cdot 8^2 8^{\frac{2}{3}} = 144 \cdot 8^2 \sqrt[3]{8^2} = 144 \cdot 64 \cdot 4$
$= 36864$.

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 3\frac{1}{3} & 3\frac{2}{3} & 4 \\ 144, & 1152, & 9216, & 18432, & 36864, & 73728 \end{matrix}$$

5. $u = -80 \cdot (\frac{3}{4})^{-3\frac{1}{5}} = -80 \cdot \frac{1}{(\frac{3}{4})^{3\frac{1}{5}}} = -80 \cdot \frac{1}{(\frac{3}{4})^3 \cdot \sqrt[5]{\frac{3}{4}}} =$

$-\frac{80}{\frac{3^3}{4^3} \cdot \frac{\sqrt[5]{3}}{\sqrt[5]{4}}} = -\frac{80 \cdot 4^3 \cdot \sqrt[5]{4}}{3^3 \cdot \sqrt[5]{3}}$.

6. $u = \frac{1}{6\sqrt[8]{6^7}}$.

Zu §. 120.

Seite 111 Zeile 13 von oben lies gilt statt giebt.

Zu §. 121.

Seite 111 Zeile 5 von unten lies $\frac{2}{3}$ statt $\frac{2}{4}$.

Auflösung der Aufgaben.

1. $a = u - (n-1)d = 120 + 8.5 = 160$

-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2
120,	125,	130,	135,	140,	145,	150,	155,	160,	165.

2. $a = -10 - (-10 . -4) = -10 - 40 = -50$

-9,	-8,	-7,	-6,	-5,	-4,	-3,	-2,
-10,	-14,	-18,	-22,	-26,	-30,	-34,	-38,

-1,	0,	1,	2
-42,	-46,	-50,	-54.

3. $a = 18 - 4\frac{1}{3} . 2\frac{1}{4} = 18 - 9\frac{3}{4} = 8\frac{1}{4}$

1	2	3	4	5	$5\frac{1}{3}$,	$5\frac{2}{3}$,	6
$8\frac{1}{4}$,	$10\frac{1}{2}$,	$12\frac{3}{4}$,	15,	$17\frac{1}{4}$,	18,	$18\frac{3}{4}$,	$19\frac{1}{2}$.

4. $a = 20 - (-\frac{1}{4} . 6) = 20 + 1\frac{1}{2} = 21\frac{1}{2}$

0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	2
$15\frac{1}{2}$,	17,	$18\frac{1}{2}$,	20,	$21\frac{1}{2}$,	$27\frac{1}{2}$

5. $a = 36 - (-9\frac{1}{2} . -4) = 36 - 38 = -2$

-9	$-8\frac{1}{2}$	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2
38,	36,	34,	30,	26,	22,	18,	14,	10,	6,	2,	-2,	-6

6. $a = -50 - (-1\frac{2}{3} . -2) = -50 - 3\frac{1}{3} = -53\frac{1}{3}$

-1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	1	2
$-49\frac{1}{3}$,	-50,	$-50\frac{2}{3}$,	$-51\frac{1}{3}$,	$-53\frac{1}{3}$,	$-55\frac{1}{3}$.

Zu §. 122.

In der ersten Aufgabe lies $n = -11$ statt $n = 1 - 11$.

Auflösung der Aufgaben.

1. $d = \frac{u - a}{n - 1} = \frac{80 - 20}{-11 - 1} = \frac{60}{-12} = -5$

-11	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2
80,	75,	70,	65,	60,	55,	50,	45,	40,	35,	30,	25,	20,	15

2. $d = \frac{35 - -5}{-9 - 1} = \frac{35 + 5}{-10} = \frac{40}{-10} = -4$

-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2
35,	31,	27,	23,	19,	15,	11,	7,	3,	-1,	-5,	-9

3. $d = \frac{-16-4}{2\frac{1}{5}-1} = \frac{-20}{1\frac{1}{5}} = -16\frac{2}{3}$

$\begin{matrix} 1 & 2 & 2\frac{1}{5} & 2 2\frac{2}{5} & 2 2\frac{3}{5} & 2 2\frac{4}{5} & 3 \\ 4, & -12\frac{2}{3}, & 16, & 19\frac{1}{3}, & 22\frac{2}{3}, & 26, & 29 \end{matrix}$

4. $d = -72\frac{12}{29}$.

5. $d = -832$.

6. $d = -11\frac{3}{7}$.

Zu §. 123.

Auflösung der Aufgaben.

1. $a = \frac{u}{e^{n-1}} = \frac{64}{2^{-4}} = \frac{64}{\frac{1}{24}} = 64 . 2^4 = 1024$.

$\begin{matrix} -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 64, & 128, & 256, & 512, & 1024, & 2028 \end{matrix}$

2. $u = \frac{243}{3^{-7}} = 243 . 3^7 = 531441$.

3. $u = \frac{100}{5^{1\frac{1}{3}}} = \frac{100}{5\sqrt[3]{5}} = \frac{20}{\sqrt[3]{5}}$.

4. $u = \frac{12}{2^{-1\frac{5}{6}}} = \frac{12}{\frac{1}{2^{1\frac{5}{6}}}} = 12 . 2^{1\frac{5}{6}} = 12 . 2 . 2^{\frac{5}{6}} = 24\sqrt[6]{2^5}$.

5. $u = \frac{48}{4^{-1\frac{1}{4}}} = \frac{48}{\frac{1}{4^{1\frac{1}{4}}}} = 48 . 4^{1\frac{1}{4}} = 48 . 4 . \sqrt[4]{4} = 192\sqrt[4]{4}$.

6. $u = \frac{1}{3^{-4\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\frac{1}{3^{4\frac{1}{2}}}} = 3^{4\frac{1}{2}} = 3^4\sqrt{3} = 81\sqrt{3}$

Zu §. 124.

Auflösung der Aufgaben.

1. Nach Lehrbuch S. 157 ist $e = \sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}$; hier also

$$e=\sqrt[-5]{\frac{50}{5}}=\sqrt[-5]{10}=10^{-\frac{1}{5}}=\frac{1}{10^{\frac{1}{5}}}=\frac{1}{\sqrt[5]{10}}.$$

2. $e=\sqrt[1\frac{1}{2}]{\frac{32}{2}}=\sqrt[1\frac{1}{2}]{16}=16^{\frac{1}{1\frac{1}{2}}}=16^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{16^2}.$

3. $e=\sqrt[-4\frac{1}{3}]{\frac{180}{3}}=\sqrt[-4\frac{1}{3}]{60}=\sqrt[-\frac{13}{3}]{60}=60^{-\frac{1}{\frac{13}{3}}}=60^{-\frac{3}{13}}$
$=\frac{1}{60^{\frac{3}{13}}}=\frac{1}{\sqrt[13]{60^3}}.$

4. $e=\sqrt[-\frac{1}{2}]{\frac{288}{4}}=\sqrt[-\frac{1}{2}]{72}^{\,}=72^{-\frac{1}{\frac{1}{2}}}=72^{-2}=\frac{1}{5184}.$

5. $e=\sqrt[-\frac{4}{7}]{\frac{64}{8}}=\sqrt[-\frac{4}{7}]{8}=\frac{1}{8^{\frac{7}{4}}}=\frac{1}{\sqrt[4]{8^7}}.$

Zu §. 127.

Auflösung der Aufgaben.

1. $S=(4+28).\frac{9}{2}=\frac{288}{2}=144.$

Um die Reihe selbst zu erzeugen, suche man d, es ist $=-3$; also

$$\overset{-7}{S=28}+\overset{-6}{25}+\overset{-5}{22}+\overset{-4}{19}+\overset{-3}{16}+\overset{-2}{13}+\overset{-1}{10}+\overset{0}{7}+\overset{1}{4}=144.$$

2. $S=\left(2a+(n-1)d\right)\frac{n+2}{2}=(8+4.3)\,\frac{5}{2}$ plus dem Gliede dessen Anzeiger $5\frac{1}{4}$ ist $=50$ plus dem Gliede dessen Anzeiger $5\frac{1}{4}=50+16\frac{3}{4}=66\frac{3}{4}$

$$\overset{1}{4}+\overset{2}{7}+\overset{3}{10}+\overset{4}{13}+\overset{5}{16}+\overset{5\frac{1}{4}}{16\frac{3}{4}}=66\frac{3}{4}.$$

3. $S=(2.10-4.-10)\,\frac{11}{2}+$ dem Gliede dessen Anzeiger $-9\frac{1}{2}=330+52=382$

$$\overset{-9\frac{1}{2}}{52}+\overset{-9}{50}+\overset{-8}{46}+\overset{-7}{42}+\overset{-6}{38}+\overset{-5}{34}+\overset{-4}{30}+\overset{-3}{26}+$$
$$\overset{-2}{22}+\overset{-1}{18}+\overset{0}{14}+\overset{1}{10}=382.$$

4. Soll

4. Soll die Aufgabe sagen, es sey nur das eine Glied, dessen Anzeiger $\frac{4}{5}$ ist, vorhanden, so sieht man, daß das Glied die Summe selbst ist.

Zu §. 128.

Seite 116 Zeile 12 von oben lies $\frac{ae^{n+2}-a}{e^{n+1}}$ statt $\frac{ae^{n+2}-a}{e^{n+2}}$ und $S=\frac{ae^{n+2}-a}{e^{n+1}(e-1)}$ statt $\frac{ae^{n+2}-a}{e^{n+2}.(e-1)}$

Gesetzt n sey eine ganze Zahl und r ein Bruch und man verstünde unter Summe der Reihe, alle Glieder, deren Anzeiger eine ganze Zahl ist und das einzige Glied dessen Anzeiger die ganze Zahl und Bruch $=n+r$ ist; so müßte, wenn der zu n hinzugefügte Bruch $=r\frac{m}{t}$ wäre,

$$S=a+ae+ae^2 \ldots\ldots ae^{n-1}+ae^{n-1+\frac{m}{t}}$$

Folglich

$$eS=ae+ae^2 \ldots\ldots ae^{n}+ae^{n+\frac{m}{t}} \text{ seyn.}$$

wo man also nicht erhält $eS-S=ae^{n+\frac{m}{t}}-a$.

Folglich kann die für S im Lehrbuch gegebene Formel nicht gebraucht werden, wenn bei n ein Bruch sich findet.

Zu §. 129.

Auflösung der Aufgaben.

$$1.\ S=\frac{ae^{n+2}-a}{e^{n+1}.(e-1)}=\frac{100.2^7-100}{2^6}=\frac{12800}{64}=198\tfrac{7}{16}$$

$$\overset{-5}{S=1\tfrac{9}{16}}+\overset{-4}{3\tfrac{1}{8}}+\overset{-3}{6\tfrac{1}{4}}+\overset{-2}{12\tfrac{1}{2}}+\overset{-1}{25}+\overset{0}{50}+\overset{1}{100}=198\tfrac{7}{16}$$

2. $S=\frac{3.(\frac{1}{4})^9-3}{(\frac{1}{4})^8.(\frac{1}{4}-1)}=\frac{-\frac{786429}{262144}}{-\frac{3}{262144}}=261243.$

3. $S=\frac{8.3^6-8}{\frac{2}{1}}+$ dem Gliede dessen Anzeiger $6\frac{1}{2}$ $=2912+2044\sqrt{3}.$

4. $S=19\frac{3}{8}+\frac{5}{8}.\sqrt[4]{2}.$

$$\overset{-3\frac{1}{4}}{S=\tfrac{5}{8}.\sqrt[4]{2}}+\overset{-3}{\tfrac{5}{8}}+\overset{-2}{1\tfrac{1}{4}}+\overset{-1}{2\tfrac{1}{2}}+\overset{0}{5}+\overset{+1}{10}=19\tfrac{3}{8}+\tfrac{5}{8}.\sqrt[4]{2}.$$

Zu §. 132.

Um die Anzahl der Aufgaben zu finden, muß man die Frage beantworten, wie viel Verbindungen zu 3 und 3 lassen 5 Dinge zu, wobei aber keine Versetzungen sich finden? Dies sind nach §. 8. $\frac{5.4.3}{1.2.3}=10.$

Zu §. 133.

Auflösung der Aufgaben.

Zu II. Gegeben a, d, u; gesucht S.

$$S=(a+u)\tfrac{1}{2}n.$$

Man substituire statt n den Werth $\frac{u-a}{d}+1$, so ist

$$S=(a+u)\tfrac{1}{2}n=\frac{(a+u).\left(\frac{u-a}{d}+1\right)}{2}=\frac{(a+u).(u-a+d)}{2d}$$

$$=\frac{(a+u).(u-a)+(a+u)d}{2d}=\frac{u^2-a^2+(a+u)d}{2d}$$

Zu III. Gegeben a, d, S; gesucht n.

$$S = [2a + (n-1)d]\tfrac{1}{2}n$$

$$2S = (2a + (n-1)\,d\,n$$

$$2S = 2an + dn^2 - dn$$

$$2S = dn^2 + 2an - dn = dn^2 + (2a-d)n$$

$$\frac{2S}{d} = n^2 + \frac{2a-d}{d}n$$

$$\frac{2S}{d} + \frac{(2a-d)^2}{4d^2} = n^2 + \frac{2a-d}{d}n + \frac{(2a-d)^2}{4d^2}$$

$$\frac{8dS + (2a-d)^2}{4d^2} = n^2 + \frac{2a-d}{d}n + \frac{(2a-d)^2}{4d^2}$$

$$\sqrt{\frac{8dS + (2a-d)^2}{4d^2}} = n + \frac{2a-d}{2d}$$

$$\frac{\sqrt{8dS + (2a-d)^2}}{2d} = n + \frac{2a-d}{2d}$$

$$\frac{-(2a-d) + \sqrt{(8dS + (2a-d)^2)}}{2d} = n$$

Gegeben a, d, S; gesucht u

$$S = \frac{u^2 - a^2 + (a+u)d}{2d}$$

$$2dS = u^2 - a^2 + ad + du$$

$$2dS + a^2 - ad = u^2 + du$$

$$\sqrt{(2dS + a^2 - ad + \tfrac{1}{4}d^2)} = u + \tfrac{1}{2}d$$

$$-\tfrac{1}{2}d \pm \sqrt{[2dS + (a - \tfrac{1}{2}d)^2]} = u$$

Es sey $a = 7$, $d = 4$, $S = 102$, so findet man $u =$ 27 oder -31. Man sieht, daß für den gegebenen Fall der negative Werth -31 nicht paßt, denn wenn a und d positiv sind, kann u nicht negativ werden.

Es sey $a = 8$, $d = -3$, $S = -20$, so findet man $u = +16$ oder -13; hier kann im Gegentheil der positive Werth nicht statt finden, denn wenn a und u po-

sitiv wären, müßte die ganze Reihe positiv, also könnte S nicht negativ seyn.

Zu V.

Gegeben a, n, S; gesucht d

$$S = [2a + (n-1)d]\tfrac{1}{2}n$$

$$2S = 2an + n.(n-1)d$$

$$2S - 2an = n.(n-1).d$$

$$\frac{2(S-an)}{n.(n-1)} = d$$

Gegeben a, n, S; gesucht u

$$S = (a+u)\tfrac{1}{2}n$$

$$2S = an + un$$

$$2S - an = un$$

$$n)\ \frac{2S-an}{n} = u.$$

Zu VI.

Gegeben a, u, S; gesucht n

$$S = (a+u)\tfrac{1}{2}n$$

$$2S = (a+u)n$$

$$\frac{2S}{a+u} = n$$

Gegeben a, u, S; gesucht d

$$S = \frac{u^2 - a^2 + (a+u)d}{2d}$$

$$2dS = u^2 - a^2 + (a+u)d \quad (2d$$

$$2dS - ad - du = u^2 - a^2$$

$$d = \frac{u^2 - a^2}{2S - a - u}$$

Zu VII. Gegeben d, n, u; gesucht S

$$S=[2a+(n-1)d]\tfrac{1}{2}n$$

setzt man $a=u-(n-1)d$; so erhält man

$$S=[2(u-(n-1))d+(n-1)d]\tfrac{1}{2}n=[2u-2(n-1)d+(n-1)d]\tfrac{1}{2}n=[2u-(n-1)d]\tfrac{1}{2}n.$$

Zu VIII. Gegeben d, n, S; gesucht a

$$S=(2a+(n-1)d)\tfrac{1}{2}n$$

$$2S=[2a+(n-1)d]n$$

$$\frac{2S}{n}=2a+(n-1)d$$

$$\frac{2S}{n}-(n-1)d=2a$$

$$\frac{2S-n.(n-1)d}{n}=2a$$

$$\frac{2S-n.(n-1)d}{2n}=a$$

Gegeben d, n, S; gesucht u.

$$S=[2u-(n-1)d]\tfrac{1}{2}n$$

$$2S=[2u-(n-1)d]n$$

$$\frac{2S}{n}=2u-(n-1)d$$

$$\frac{2S+n.(n-1)d}{n}=2u$$

$$\frac{2S+n.(n-1)d}{2d}=u$$

Zu IX.

Gegeben d, u, S; gesucht a.

$$d=\frac{u^2-a^2}{2S-a-u}$$

$$2dS-ad-du=u^2-a^2$$

$$a^2 - ad = u^2 + du - 2dS$$

$$a - \tfrac{1}{2}d = \pm \sqrt{u^2 + du + \tfrac{1}{4}d^2 - 2dS}$$

$$a = \tfrac{1}{2}d \pm \sqrt{[(u + \tfrac{1}{2}d)^2 - 2dS]}$$

Ist u positiv und d negativ, so kann a keinen negativen Werth haben; so wie, wenn d positiv, u aber negativ ist, a nicht positiv seyn kann. Ist die unter dem Wurzelzeichen stehende Größe negativ, so ist die Aufgabe unmöglich, d. h. sie enthält einen Widerspruch z. B. $u = -29$, $d = 4$, $S = 119$. Der Widerspruch ist klar, a muß unter den gegebenen Bedingungen auch negativ seyn, also sind es alle Glieder der Progression, folglich kann S nicht positiv seyn, wie die Aufgabe sagt.

Gegeben d, u, S; gesucht n.

$$S = [2u - (n - 1)d]\tfrac{1}{2}n$$

$$2S = 2nu - n.(n - 1)d$$

$$2S = 2nu - dn^2 + dn$$

$$dn^2 - 2nu - dn = -2S$$

$$n^2 - \left(\frac{2nu + dn}{d}\right) = -\frac{2S}{d}$$

$$n^2 - \left(\frac{2u + d}{d}\right)n = -\frac{2S}{d}$$

$$n^2 - \left(\frac{2u + d}{d}\right)n + \frac{(2u + d)^2}{4d^2} = \frac{(2u + d)^2}{4d^2} - \frac{8dS}{4d^2}$$

$$n - \left(\frac{2u + d}{2d}\right) = \frac{\sqrt{(2u + d)^2 - 8dS}}{2d}$$

$$n = \frac{2u + d + \sqrt{(2u + d)^2 - 8dS}}{2d}$$

Zu X. Gegeben n, u, S; gesucht a.

$$n = \frac{2S}{a+u}$$

$$an + nu = 2S$$

$$an = 2S - nu$$

n) $$a = \frac{2S}{n} - u$$

Gegeben n, u, S; gesucht d.

$$[2u - (n-1)d]\tfrac{1}{2}n = S$$

$$[2u - (n-1)d]n = 2S$$

$$2nu - n.(n-1)d = 2S$$

$$2nu - 2S = n.(n-1)d$$

$$\frac{2(nu - S)}{n.(n-1)} = d$$

Zu §. 135.

Zu III. Gegeben a, e, S; gesucht u.

$$S = \frac{eu - a}{e - 1}$$

$$(e-1)S = eu - a$$

$$(e-1)S + a = eu$$

u) $$\frac{(e-1)S + a}{u} = e$$

Zu VI. Gegeben a, u, S; gesucht e.

$$S = \frac{eu - a}{e - 1}$$

$$eS - S = eu - a$$

$$eS - eu = S - a$$

$$e - \frac{S - a}{S - u}$$

Zu VIII. Gegeben e, n, S; gesucht a.

$$S = \frac{ae^n - a}{e - 1}$$

$$(e-1)S = ae^n - a \quad (e-1$$

$$e^n - 1) \quad \frac{(e-1)S}{e^n - 1} = a$$

Gegeben e, n, S; gesucht u.

$$S = \frac{(e^n - 1)a}{e^{n-1}.(e-1)}$$

$$e^{n-1}.(e-1).S = (e^n - 1)u$$

$$\frac{e^{n-1}.(e-1)S}{e^n - 1} = u$$

Zu IX. Gegeben e, u, S; gesucht a.

$$e = \frac{S - a}{S - u}$$

$$e(S-u) = S - a$$

$$a = S - e(S-u) = S + (u - S)e$$

Zu §. 137.

4,	12,	36,	108,	324,	972
	8,	24,	72,	216,	648
		16,	48,	144,	432
			32,	96,	288
				64,	192

Zu §. 141.

Auflösung der Aufgaben.

Man sucht log. 69452681837.

$\frac{69452681837}{6945} = 10000386.$

log. 100003 = 5,0001303
0,8 = 35
0,06 = 8

log. 100003,86 = 5,0001344
log. 10000386 = 7,0001344
log. 6945 = 3,8416723

log. 10000386 × log. 6945 = 10,8418067

2. Man sucht den log. 813762,9468

$\frac{81372,9468}{813} = 1000,9385$

log. 100093 = 5,0004037
0,8 = 34
0,05 = 2

log. 100093,85 = 5,0004074
log. 1000,9385 = 3,0004073
log. 813 = 2,9100905

log. 1000,9385 × log. 813 = 5,9104973

3. Man sucht den log. 0,276348965 1

$\frac{276348965 1}{276} = 100012643$

log. 100126 = 5,0005469
0,4 = 18
0,03 = 1

1000126,43 — 5,0005488
log. 276 = 2,4409091

log. 27634896,51 = 7,4414579
log. 2763489651 = 9,4414579
log. 0,2763489651 = — 10 + 9,4414579

4. Man sucht die Zahl des log. 10,0827653

$$\begin{array}{rr} & 10,0827653 \\ \log.52971 = & 4,7240382 \\ \hline & 5,2577253 \\ \log.18143 = & 4,2587091 \\ \hline & 62 \\ 0,2 = & 48 \\ 0,01 = & 14 \end{array}$$

log. 52971 × 18143,21 = 10,0827635.

Zu §. 142.

Beweis für die Richtigkeit der Verwandlung der Operation.

Es sey m der Minuendus (der wiederum eine Summe seyn kann) und n sey der Subtrahendus, die Zahl, von der man n subtrahirt, um das Complement zu erhalten, heiße a, so ist n — a das Complement von n. Minuendus und Complement vom Subtrahendus addirt, giebt folglich m — (n — a) = m — n + a; dies ist um a zu groß; man wird also m — n erhalten, wenn man davon a wegnimmt.

Zu §. 144.

Die Formel: h = k (H — 1) sagt, der Logarithmus einer Zahl, welche um sehr wenig größer als 1 ist, ist gleich dem Product aus dem Modulus des Systems multiplicirt mit der Differenz zwischen dieser Zahl und 1.

Zu §. 148.

Seite 142 Zeile 4, von oben lies q^2 statt 9^2 und Zeile 5 lies q^3 statt 9^3.

Zu §. 150.

Die im Zusatz 1 gegebene Formel in Worten ausgedrückt heißt: Man findet den Logarithmus einer Zahl in einem System, wenn man den Logarithmus derselben Zahl in einem andern System mit dem Modulus des ersten Systems multiplicirt und mit dem Modulus des zweiten Systems dividirt.

Zum Zusatz 2. Der natürliche Logarithmus einer Zahl ist gleich dem Logarithmus derselben Zahl aus einem künstlichen System dividirt durch den Modulus dieses Systems; und umgekehrt ist der künstliche Logarithmus einer Zahl gleich dem natürlichen Logarithmus derselben Zahl multiplicirt mit dem Modulus des künstlichen Systems.

Zu §. 158.

Seite 154 Zeile 5 von oben lies $1-y$ statt $x1-y$.

Man soll zu einem gegebenen negativen Logarithmen die Zahl finden, wenn der Modulus des Systems bekannt ist.

Der gegebene Logarithmus sey $-x$, die dazu gehörige Zahl $1-y$; so ist $1-y=a^{-x}$. In der Reihe

$-1\ 0\ 1\ 2$

$\frac{1}{a}, 1, a, a^2 \ldots$ seyen zwischen jeden 2 Gliedern $n-1$ Glieder eingeschaltet und es sey

$$n(a^{\frac{1}{n}}-1)=p$$

$$na^{\frac{1}{n}}-n=p$$

$$na^{\frac{1}{n}}=n+p$$

$$n) \qquad a^{\frac{1}{n}}=1+\frac{p}{n}$$

Man setze $x=\frac{u}{n}$, so ist $1-y=a^{-x}=a^{-\frac{u}{n}}$

$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{-u}\left(1+\frac{p}{n}\right)^{-u}$.

Entwickelt man das Binomium, so erhält man:

$1-y=1-u.\frac{p}{n}+\frac{-u.-u-1}{1.\ 2}.\frac{p^2}{n^2}+\frac{-u.-u-1.-u-2}{1.\ 2.\ 3}.\frac{p^3}{n^3}\ldots$

$=1-u.\frac{p}{n}+\frac{u.u+1}{1.\ 2}.\frac{p^2}{n^2}-\frac{u.u+1.u+2}{1.\ 2.\ 3}.\frac{p^3}{n^3}\ldots$

Setzt man $u=\infty$, so ist $u+1=u$, $u+2=u$ u. s. w., folglich $1-y=1-\frac{u}{n}p+\frac{u^2}{1.\ 2.\ n^2}p^2-\frac{u^3}{1.2.3.n^3}p^3\ldots$

Da nun $x=\frac{u}{n}$, so ist

$$1-y=1-xp+\frac{x^2}{1.\ 2}p^2-\frac{x^3}{1.2.3.}p^3\ldots=$$

$$1-\frac{px}{1}+\frac{p^2x^2}{1.\ 2}-\frac{p^3x^3}{1.\ 2.\ 4.}\ldots \text{ und } p=\frac{1}{k}.$$

Zu §. 158.

Seite 155 Zeile 11 von oben lies $-y^2-\frac{1}{2}y^4-\frac{1}{3}y^6\ldots=-2(\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{4}y^4+\frac{1}{6}y^6\ldots)$ statt $y^2+\frac{1}{2}y^4-\frac{1}{3}y^6=2(\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{4}y^4+\frac{1}{6}y^6\ldots)$

$$z=\frac{1+y}{1-y}$$

$$z-zy=1+y \quad (1-y$$

$$z-1=zy+y$$

$$z-1=(z+1)y$$

$$z+1)\quad \frac{z-1}{z+1}=y$$

Zu §. 161.

Um log. nat. von 5 zu finden, ist $z=5$, also $y \frac{1}{2z-1}=\frac{1}{10-1}=\frac{1}{9}$; setzt man nun in der im §. befindlichen Formel $y=\frac{1}{9}$, so erhält man den angegebenen Werth vom log. nat. 5.

Auflösung der Aufgaben.

Soll man log. nat. 7 bestimmen, so ist $z=7$, also $y=\frac{1}{2z-1}=\frac{1}{2.7-1}=\frac{1}{13}$, hieraus ergiebt sich

$$\text{log. nat. } 7=\text{log. nat. } 6+2\left[\tfrac{1}{13}+\tfrac{1}{3}.(\tfrac{1}{13})^3+\tfrac{1}{5}.(\tfrac{1}{13})^5+\tfrac{1}{7}.(\tfrac{1}{13})^7\ldots\ldots\right]$$

Zu §. 162.

Ist $\frac{N+d}{N}=\frac{1+y}{1-y}$; so ist $\log.\frac{N+d}{N}=\log.\frac{1+y}{1-y}$.

Es ist aber $\log.\frac{N+d}{N}=\log.(N+d)-\log. N$; wor-

aus folgt $\log.(N+d) = \log.N + \log.\frac{1+y}{1-y}$ und also nach §. 159. $\log.(N+d) = \log.N + 2(y + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{5}y^5 \ldots\ldots)$. Um y zu finden, dient die Annahme $\frac{N+d}{N} = \frac{1+y}{1-y}$;

$$\frac{N+d}{N} = \frac{1+y}{1-y}$$

$$N+d = \frac{N+Ny}{1-y} \quad (N$$

$$N - Ny + d - dy = N + Ny \quad (1-y$$

$$d = 2Ny + dy$$

$$\frac{d}{2N+d} = y.$$

Zu §. 163.

Seite 159 Zeile 2 und 3 von unten lies 9 statt q.

Zu §. 165.

Beantwortung der im §. aufgeworfenen Frage.

Man reducirt eine Gleichung auf Null, wenn man die auf der einen Seite befindlichen Glieder auf die andere mit entgegengesetzten Zeichen bringt; nur hat man darauf zugleich zu sehen, daß x in der höchsten Potenz + ist.

Zu §. 167.

Auflösung der im §. gegebenen Aufgaben.

1. $4x^5 - 2x + 6x^2 = 18x^6 + 2x - 7x^5 + 412$

$0 = 18x^6 - 7x^5 - 4x^5 - 6x^2 + 2x + 2x + 412$

$0 = 18x^6 - 11x^5 - 6x^2 + 4x + 412$

$0 = 18x^6 - 11x^5 + 0x^4 + 0x^3 - 6x^2 + 4x + 412$

18) $0 = x^6 - \frac{11}{18}x^5 + 0x^4 + 0x^3 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{412}{18}$

2. $px^5 + qx^2 - x = rx^2 + px^4 + m - n$

$px^5 - px^4 + qx^2 - rx^2 - x - m + n = 0$

$px^5 - px^4 + (q-r)x^2 - x - m + n = 0$

$x^5 - x^4 + \frac{q-r}{p}x^2 - \frac{1}{p}x + \frac{n-m}{p} = 0$

$x^5 - x^4 + 0x^3 + \frac{q-r}{p}x^2 - \frac{1}{p}x + \frac{n-m}{p} = 0$

Zu §. 170.

Man setze $x = 4$, so ist

$4^3 + 3.4^2 - 18.4 - 40 = 64 + 48 - 72 - 40 = 0.$

Ist $x = -2$, so ist

$(-2)^3 + 3.(-2)^2 - 18.-2 - 40 = -8 + 12 + 36 - 40 = 0$

Ist endlich $x = -5$, so ist

$(-5)^5 + 3.(-5)^2 - 18.-5 - 40 = -125 + 75 + 90 - 40 = 0$

Zu §. 174.

In der Auflösung lies $-4x^2$ statt -4^2.

Auflösung der Aufgaben.

3.

$$-9x+8x^{\frac{2}{3}}=100$$

$$8x^{\frac{2}{3}}=9x+100$$

$$512x^2=729x^3+24300x^2+270000x+1000000$$

4.

$$8x^{\frac{1}{2}}=-12+4x^{\frac{3}{4}}.$$

$$8x^{\frac{1}{2}}+12=4x^{\frac{3}{4}}$$

$$4)\quad 2x^{\frac{1}{2}}+3=x^{\frac{3}{4}}$$

$$16x^2+96x\sqrt{x}+216x+216\sqrt{x}+81=x^3$$

$$(96x+216)\sqrt{x}=x^3-16x^2-216x-81$$

$$(9216x^2+41472x+46656)x=x^6-32x^5-176x^4$$
$$+6750x^3+49248x^2+34992x+6561.$$

Zu §. 175.

Seite 166 Zeile 12 von oben lies $(-P+\frac{1}{4}S^2)$ statt $(-P\frac{1}{4}S^2)$.

Zu §. 176.

$$\begin{array}{l|l} x^2+Sx+P & x-a \\ \cline{2-2} x^2-ax & x+S+a \\ -\quad + & \\ \hline Sx+ax+P & \\ Sx-aS & \\ -\quad + & \\ \hline ax+aS+P & \\ ax-a^2 & \\ -\quad + & \\ \hline a^2+aS+P & \end{array}$$

Zu §.

Zu §. 177.

Ist nämlich $x+S+a=0$, so ist $x=-S-a$, also $-S-a$ eine Wurzel der Gleichung.

Zu §. 180.

Seite 170 Zeile 16 von oben lies CD statt Cd

Zu §. 181.

Gesetzt $x^2+P=0$; so ist $x^2=-P$ und also $x=\sqrt{-P}$.

Zu §. 185.

Seite 174 Zeile 2 von oben lies x^4+Sx^2 statt x^2+Sx^2.

Zu §. 186.

Auflösung der Aufgaben.

1. Die eine Zahl sey x, so ist die andere $a-x$; die Summe ihrer Quadrate also $x^2+a^2-2ax+x^2=2x^2-2ax+a^2$, dies giebt die Gleichung

$$2x^2-2ax+a^2=b$$

$$2x^2-2ax=b-a^2$$

$$2) \quad x^2-ax=\frac{b-a^2}{2}$$

$$x=\tfrac{1}{2}a\pm\frac{\sqrt{2b-a^2}}{2}=\frac{a\pm\sqrt{2b-a^2}}{2}$$

2. Die eine Zahl sey x, so ist die andere $\frac{b}{x}$; die Summe ihrer Quadrate $x^2+\frac{b^2}{x^2}$; dies giebt die Gleichung

$$x^2 + \frac{b^2}{x^2} = a$$

$$x^4 + b^2 = ax^2$$

$$x^4 - ax^2 = -b^2$$

Es sey $x^2 = z$, so ist

$$z^2 - az = -b^2$$

$$z = \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{-b^2 + \tfrac{1}{4}a^2}$$

folglich $x^2 = \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{-b^2 + \tfrac{1}{4}a^2}$

$$x = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{-b^2 + \tfrac{1}{4}a^2}}$$

3. Die eine Zahl sey x, so ist die andere $a - x$; die Summe ihrer Cuben $x^3 + a^3 - 3a^2x + 3ax^2 - x^3 = a^3 - 3a^2x + 3ax^2$, dies giebt die Gleichung

$$3ax^2 - 3a^2x + a^3 = b$$

$$3ax^2 - 3a^2x = b - a^3$$

$$3a)\quad x^2 - ax = \frac{b - a^3}{3a}$$

$$x^2 - ax + \tfrac{1}{4}a^2 = \frac{b - a^3}{3a} + \tfrac{1}{4}a^2 = \frac{4b - 4a^3 + 3a^3}{12a} = \frac{4b - a^3}{12a}$$

$$x = \tfrac{1}{2}a \pm \left(\frac{4b - a^3}{12a}\right)$$

Zu §. 190.

$$(2 + \sqrt{2})^3 = 20 + 14\sqrt{2}$$

$$(2 + \sqrt{2})^3$$

$$8 + 12\sqrt{2} + 12 + 2\sqrt{2} = 20 + 14\sqrt{2}$$

$$(2 - \sqrt{2})^3) = 20 - 14\sqrt{2}$$

$$(2 - \sqrt{2})^3$$

$$8 - 12\sqrt{2} + 12 - 2\sqrt{2} = 20 - 14\sqrt{2}$$

Man findet q und p auf folgende Weise:

$$q^3 = 40 - p^3 = 40 - y$$

$$q^3 = 40 - 20 \mp 14\sqrt{2}$$

$$q^3 = 20 \mp 14\sqrt{2}$$

$$q = 2 \mp \sqrt{2}$$

Zu §. 192.

Auflösung der Aufgaben.

1. Man soll die Gleichung $x^3 = 18x + 35$ auflösen.

$$x^3 - 18x - 35 = 0$$

Hier ist nach der Formel für die Cardanische Regel $B = -18$, $C = -35$; also

$$= \sqrt[3]{\left(\frac{35 \pm \sqrt{(\frac{4}{27} \cdot -18^3 + (-35)^2)}}{2}\right)}$$

$$+ \sqrt[3]{\left(\frac{35 \mp \sqrt{(\frac{4}{27} \cdot -18^3 + (-35)^2)}}{2}\right)}$$

$$= \sqrt[3]{\left(\frac{35 \mp \sqrt{(-864 + 1225)}}{2}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{35 \mp \sqrt{(-864 + 1225)}}{2}\right)}$$

$$= \sqrt[3]{\left(\frac{35 \pm \sqrt{(361)}}{2}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{35 \mp \sqrt{(361)}}{2}\right)}$$

$$= \sqrt[3]{\left(\frac{35 + 19}{2}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{35 - 19}{2}\right)}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{54}{2}} + \sqrt[3]{\frac{16}{2}} = \sqrt[3]{27} + \sqrt[3]{8} = 3 + 2 = 5$$

$$5^3 - 18 \cdot 5 - 35 = 125 - 90 - 35 = 0$$

2. Man soll die Gleichung $x^3 - 357 = -2x$ auflösen.

$$x^3 + 2x - 357 = 0$$

folglich $B = 2$, $C = -357$.

Der Cardanischen Regel zu Folge ist:

$$x=\sqrt[3]{\left(\frac{357+\sqrt{(\frac{4}{27}\cdot 2^3+357^2)}}{2}\right)}+\sqrt[3]{\left(\frac{357-\sqrt{(\frac{4}{27}\cdot 2^3+357^2)}}{2}\right)}=$$

$$\sqrt[3]{\left(\frac{357+\sqrt{(\frac{4}{27}\cdot 8+127449)}}{2}\right)}+\sqrt[3]{\left(\frac{357-\sqrt{(\frac{4}{27}\cdot 8+127449)}}{2}\right)}=$$

$$\sqrt[3]{\left(\frac{357+\sqrt{\left(\frac{3441155}{27}\right)}}{2}\right)}+\sqrt[3]{\left(\frac{357-\sqrt{\left(\frac{3441155}{27}\right)}}{2}\right)}=$$

$$\sqrt[3]{\left(\frac{357+\sqrt{\left(\frac{10323465}{81}\right)}}{2}\right)}$$

$$+\sqrt[3]{\left(\frac{357-\sqrt{\left(\frac{10323465}{81}\right)}}{2}\right)}=$$

$$\sqrt[3]{\left(\frac{357+\frac{3213,01493290\ldots}{9}}{2}\right)}$$

$$+\sqrt[3]{\left[\frac{357-\frac{3213,01493290\ldots}{9}}{2}\right]}=$$

$$\sqrt[3]{\left(\frac{357+357,001659921}{2}\right)}+\sqrt[3]{\left(\frac{357-357,001659921}{2}\right)}=$$

$$\sqrt[3]{(357,000829960\ldots)}+\sqrt[3]{(-0,000829960\ldots)}=$$

$$7,093\ldots-0,093\ldots=7.$$

Bei diesem Fall tritt also die Unbequemlichkeit ein, von welcher §. 189. am Ende, gesprochen, daß nämlich die Cardanische Regel oft die Wurzel der Gleichung in irrationaler Form giebt, wenn sie doch rational ist; denn daß 7 die Wurzel der Gleichung $x^3-357=-2x$, fällt in die Augen. $7^3-357=343-357=-14=-2.7$.

3. Man soll die Gleichung $x^3-66x+16=0$ auflösen.

Die Cardanische Regel giebt

$$x = \sqrt[3]{\left(\frac{-16+\sqrt{(\frac{4}{27}\cdot -66^3 + 16^2)}}{2}\right)}$$

$$+\sqrt[3]{\left(\frac{-16-\sqrt{(\frac{4}{27}\cdot -66^4 + 16^2)}}{2}\right)} =$$

$$\sqrt[3]{\left(\frac{-16+\sqrt{(-42592+256)}}{2}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{-16-\sqrt{(-42592+256)}}{2}\right)} =$$

$$\sqrt[3]{\left(\frac{-16+\sqrt{(-42336)}}{2}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{-16-\sqrt{(-42336)}}{2}\right)}$$

Hier erscheint also die Wurzel der Gleichung als imaginär oder unmöglich, ob sie gleich wirklich möglich ist; sie ist nämlich, wie man leicht findet, 8; denn $8^3 - 66.8 + 16 = 512 - 528 + 16 = 0$.

Es ist dieser Unbequemlichkeit §. 189. am Ende gedacht worden.

Zu §. 194.

Auflösung der Aufgaben.

Man setze $y = x + 1$, so ist $y - 1 = x$; man substituire diesen Werth in der gegebenen Gleichung, so erhält man:

$$\begin{array}{rcl} x^3 = (y-1)^3 & = & y^3 - 3y^2 + 3y - 1 \\ 3x^2 = 3.(y-1)^2 & = & 3y^2 - 6y + 3 \\ -15x = -15.(y-1) & = & -15y + 15 \\ -52 & = & -52 \\ \hline & & y^3 - 18y - 35. \end{array}$$

Es läßt sich aber die Gleichung $y^3 - 18y - 35 = 0$ nach der Cardanischen Regel auflösen; man findet $y = 5$; da nun $y - 1 = x$ gesetzt wurde, so ist $x = 4$.

Zu §. 195.

Setzt man in die Gleichung: $x^3 + Ax^2 + C = 0$ statt x den Ausdruck $y - \frac{1}{3}A$, so erhält man

$$\begin{array}{rl} x^3 = & y^3 - Ay^2 + \frac{1}{3}A^2y - \frac{1}{27}A^3 \\ Ax^2 = & \quad\; Ay^2 - \frac{2}{3}A^2y + \frac{1}{9}A^3 \\ C = & \qquad\qquad\qquad\qquad\quad C \\ \hline & y^3 \qquad\; - \frac{1}{3}A^2y + \frac{2}{27}A^3 + C = 0. \end{array}$$

Auflösung der Aufgabe.

Man setze $y = x + 2$, so ist $x = y - 2$; dies in die gegebene Gleichung gesetzt giebt

$$\begin{array}{rl} x^3 = & y^3 - 6y^2 + 12y - 8 \\ 6x^2 = & \quad\; 6y^2 - 24y + 24 \\ -846 = & \qquad\qquad\quad -846 \\ \hline & y^3 \qquad -12y - 830 = 0 \end{array}$$

Zu §. 201.

Es ist $(x+p).(x+q).(x+r) =$

$$\begin{array}{l} x^3 + px^2 + pqx + pqr \\ \quad\; + qx^2 + prx \\ \quad\; + rx^2 + qrx \end{array}$$

Vergleicht man diese Gleichung mit der Grundgleichung, so findet man: 1, der Coefficient von x^2 ist die entgegengesetzte Summe aller Wurzeln der Gleichung. 2. der Coefficient von x ist die Summe aller Producte von je zwei und zwei Wurzeln. 3, das entgegengesetzte Produkt aller Wurzeln ist die bekannte Größe in der Gleichung. 4. die Gleichung muß vollständig seyn, da kein Coefficient Null werden kann. 5. die Gleichung enthält drei Folgen.

Zu §. 202.

Es ist B positiv, wenn $pq > pr + qr$, also $pq - pr > qr$; folglich $p > \frac{qr}{q-r}$;

Es ist B negativ, wenn $pq < pr + qr$, folglich ist $p < \frac{qr}{q-r}$;

Endlich ist B Null, wenn $pq = pr + qr$, folglich $p = \frac{qr}{q-r}$.

Zu §. 203.

$$(x-p).(x-q).(x+r) = x^3 - px^2 + pqx + pqr$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad - qx^2 - prx$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad + rx^2 - qrx$$

Hier ist $A = -p - q + r$, die entgegengesetzte Summe aller Wurzeln, und da $p + q < r$, positiv; B ist die Summe der Produkte von je zwei und zwei Wurzeln. Es kann aber B weder Null werden, noch positiv seyn; denn im ersten Fall wäre $pq = pr + qr = (p+q)r$; folglich $\frac{pq}{p+q} = q - \frac{q^2}{p+q} = r$, dann wäre also $q > r$ und folglich $p + q > r$, welches der Bedingung $p + q < r$ widerspricht; im zweiten Falle wäre $pq > pr + qr$, oder $pq > (p+q)r$; folglich $\frac{pq}{p+q} > r$ und da $\frac{pq}{p+q} = q - \frac{q^2}{p+q}$, so wäre $q - \frac{q^2}{p+q} > r$, also $q > r$ und um so mehr $p + q > r$, welches gleichfalls der Bedingung $p + q < r$ widerspricht. B

muß daher negativ seyn. C ist das entgegengesetzte Produkt aller drei Wurzeln und positiv.

Unter den gegebenen Bedingungen muß also die Gleichung vollständig seyn und sie wird eine Folge und zwei Wechselungen haben.

Zu §. 204.

A wird $= -p - q + r$; da nun $p + q = r$, so ist $-p - q + r = 0$.

Zu §. 205.

$$(x-p).(x+q).(x+r) = x^3 - px^2 - pqx - pqr$$
$$+ qx^2 - prx$$
$$+ rx^2 + qrx$$

Wie auch p gegen $q + r$ gehalten seyn mag; so ist A = der entgegengesetzten Summe der Wurzeln, B der Summe der Produkte von je zwei und zwei, C dem entgegengesetzten Produkte aller 3 Wurzeln.

Jetzt kömmt es nur noch darauf an, die im § aufgestellten 3 Fälle zu betrachten.

1) $p > q + r$.

Unter dieser Bedingung wird A negativ, und B gleichfalls; denn gesetzt B wäre Null, so wäre $qr = pq + pr = p(q+r)$; daher $\frac{qr}{q+r} = p$; es ist aber $\frac{qr}{q+r} = r - \frac{r^2}{q+r}$; folglich $r - \frac{r^2}{q+r} = p$, woraus folgt $p < r$, und also $p < q + r$, was der Voraussetzung widerspricht. Ferner kann B nicht positiv seyn, denn sonst wäre qr

$> pq + pr$ oder $qr > p\,(q+r)$; daher $\frac{qr}{q+r} > p$, woraus folgt $r - \frac{r^2}{q+r} > p$ und also $p < r$ und $p < q + r$, was der Voraussetzung widerspricht. Es muß also B negativ seyn. C ist negativ. — Die Gleichung hat folglich unter diesen Umständen zwei Folgen und eine Wechselung.

2. $p = q + r$.

In diesem Fall wird A Null; die Gleichung also dadurch unvollständig, daß x^2 fehlt. B muß negativ seyn; denn Null kann es nicht werden, weil sonst $qr = pq + pr = p\,.\,(q+r) = (q+r)^2 = q^2 + 2rq + r^2$ wäre, was unmöglich ist, wenn q und r wirkliche Werthe haben; ferner kann B nicht positiv seyn, denn sonst wäre $qr > pq + pr$, folglich $\frac{qr}{q+r} > p$, und da $\frac{qr}{q+r} = r - \frac{r^2}{q+r}$, so wäre $p < r$ und also $p < q + r$ was der Voraussetzung widerspricht. Endlich so ist C negativ. Wie man also auch das zweite Glied ($Ax^2 = o$) annimmt, positiv oder negativ, so hat die Gleichung zwei Folgen und eine Wechselung.

3. $p < q + r$.

Dann wird A positiv; B kann positiv, negativ und Null werden. Es ist positiv, wenn $qr > pq + pr$ oder $qr > p\,(q+r)$ d. h. $\frac{qr}{q+r} > p$; es ist negativ, wenn $qr < pq + pr$ oder $\frac{qr}{q+r} < p$; es wird Null, wenn $\frac{qr}{q+r}$

$= p$. C ist negativ. Wie also auch B seyn mag, hat die Gleichung 2 Folgen und eine Wechselung.

Zu §. 210.

Ist der Werth von $x = m - n\sqrt{-1}$; so ist die Gleichung $(m - n\sqrt{-1})^3 - (p + 2m).(m - n\sqrt{-1})^2 + (2pm + m^2 + n^2).(m + n\sqrt{-1}) - pm^2 - pn^2$.

Nimmt man die nöthige Auflösung vor, so erhält man

$$(m - n\sqrt{-1})^3 = m^8 - 3m^3n\sqrt{-1} - 3mn^2 + n^3\sqrt{-1}$$

$$-(p+2m).(m-n\sqrt{-1})^2 = -m^3 + 4m^2n\sqrt{-1} + 2mn^2 + 2mpn\sqrt{-1} - pm^2 + qn^2$$

$$(2pm + m^2 + n^2).(m + n\sqrt{-1}) = m^3 - m^2n\sqrt{-1} + mn^2 - n^3\sqrt{-1} - 2mpn\sqrt{-1} + 2pm^2$$

$$\underline{-pm^2 - pn^2 \quad = \quad -pm^2 - pn^2}$$

wo sich nun die Summe leicht als Null erkennen läßt.

Anmerkungen.

Da bei der Entwickelung der Ausdrücke im Vorhergehenden mancher vielleicht Schwierigkeiten findet, so wollen wir das herausheben, wobei man anstoßen könnte.

$$(-n\sqrt{-1})^3 = -n\sqrt{-1}.-n\sqrt{-1}.-n\sqrt{-1} = n^2.1.-n\sqrt{-1} =$$

$$-n^2.-n\sqrt{-1} = n^3\sqrt{-1}.$$

$$(-n\sqrt{-1})^2 = -n\sqrt{-1}.-n\sqrt{-1} = n^2.-1 = n^2$$

Wenn man $p + 2m$ mit $(m - n\sqrt{-1})^2$ multiplicirt hat, so muß man allen Theilen des Produkts das ent-

gegengesetzte Zeichen geben, um $-(p+2m).(m-n\sqrt{-1})^2$ zu erhalten.

Man sieht bald, daß die Theile die man durch die Entwickelung erhalten hat, so geordnet sind, daß gleichartige Summanden unter einander zu stehen kommen.

Zu §. 211.

Da man weiß, daß -2 eine Wurzel der Gleichung ist, oder daß $x=-2$, so dividire man durch $x+2=0$, dieselbe und man erhält

$$x^2+8x+15=0$$

Löst man diese Gleichung auf, so erhält man $x=4\pm\sqrt{-15+16}=4\pm\sqrt{+1}=4\pm1$ d. h. 5 oder 3.

Stellt man mit $+3$ den Versuch durch Substitution an, so erhält man

$$3^3-6.3^2-3+30=27-54-3+30=0.$$

Zu §. 212.

Auflösung der Aufgaben.

1. 4 Cubicfuß und 91 Cubiczoll rh. M. sind 7004 Cubiczoll.

Es soll also $x^3=7003$

$$x=\sqrt[3]{7003}=\sqrt[3]{27}.\sqrt[3]{259}=3.6{,}743111$$
$$=20{,}229333=1^{I}\ 8^{II}\ 2^{III}\ 9^{IV}.$$

2. Die erste Zahl sey x; so ist die andere 2x und die dritte 4x; das Quadrat der letztern $16x^2$, und das Product dieses Quadrats mit der ersten Zahl $16x^3$; folglich ist $16x^3 = 432$.

$$\begin{array}{rl} & 16x^3 = 432 \\ \hline 16) & x^3 = 27 \\ \hline & x = 3 \end{array}$$

Die gesuchten Zahlen sind also 3, 6, 12.

Außer den in diesen beiden Auflösungen gefundenen Werthen, hat x in jeder noch zwei unmögliche, die man durch Auflösung der unreinen quadratischen Gleichung findet, welche man erhält, wenn man die Gleichung in der x^3 bestimmt wird, auf Null reducirt und durch x— den gefundenen möglichen Werth dividirt. Wir übergehen dies bei der ersten Aufgabe, weil die unmöglichen Werthe für x in derselben keinen Sinn haben; für die zweite Aufgabe wollen wir sie aufsuchen.

$$\begin{array}{rl} & x^3 = 27 \\ \hline & x^3 - 27 = 0 \\ \hline x-3) & x^2 + 3x + 9 = 0 \\ \hline & x^2 + 3x = -9 \\ \hline & x^2 + 3x + \frac{9}{4} = -9 + \frac{9}{4} = -\frac{27}{4} \\ \hline & x = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{-\frac{27}{4}} = \frac{-3 \pm \sqrt{-27}}{2} \end{array}$$

Für den Werth $\frac{-3+\sqrt{-27}}{2}$ sind die drei Zahlen: $\frac{-3+\sqrt{-27}}{2}$, $-3+\sqrt{-27}$, $-6+2\sqrt{-27}$. Qua-

dritt man die letztere, so erhält man $+36-24\sqrt{-27}$ $+4.-27=-72-24\sqrt{-27}$.

Endlich so ist $(-72-24\sqrt{-27}).\frac{-3+\sqrt{-27}}{2}$ $=\frac{216+648}{2}=432$.

Ist $x=\frac{-3-\sqrt{-27}}{2}$, so sind die drei Zahlen: $\frac{-3-\sqrt{-27}}{2}$, $-3-\sqrt{-27}$, $-6-2\sqrt{-27}$. Ferner ist $(-6-2\sqrt{-27})^2=36+24\sqrt{-27}+4.-27$ $=-72+24\sqrt{-27}$.

Endlich ist $(-72+24\sqrt{-27}).\frac{-3-\sqrt{-27}}{2}=$ $\frac{864}{2}=432$.

3. Die Anzahl der Enten sey x, so sind der Hühner $\frac{3x}{2}$. Ein jedes Huhn legt $\frac{1}{3}.\frac{3x}{2}=\frac{x}{2}$ Eyer; also alle zusammen $\frac{3x}{2}.\frac{x}{2}=\frac{3x^2}{4}$. Die Bäuerin erhält für jede 9 Eyer $\frac{x}{2}$ Pfennige, also für $\frac{3x^2}{4}$ Eyer $\frac{\frac{3.x^2}{4}.\frac{x}{2}}{9}=\frac{\frac{3x^3}{8}}{9}$ $=\frac{x^3}{24}=72$ Pfennige. Die Auflösung dieser Gleichung giebt $x=12$, die unmöglichen Werthe finden hier keine Anwendung.

4. Es seyen x Personen gewesen; folglich legte jeder $10x$, alle zusammen aber $10x^2$ Thaler ein. Da sie nun mit 100 Thaler $x+6$ Thaler gewinnen, so ist

ihr Gewinn $\frac{10x^2.(x+6)}{100} = \frac{10x^3+60x^2}{100} = \frac{x^3+6x^2}{10}$,

dies giebt die Gleichung

$$\frac{x^3+6x^2}{10} = 392$$

$$x^3 + 6x^2 = 3920$$

$$x^3 + 6x^2 - 3920 = 0$$

Es hat diese Gleichung, welches Zeichen man auch am fehlenden Gliede ox geben mag, 2 Folgen und eine Wechselung; sind also alle drei Wurzeln der Gleichung möglich, so sind zwei negativ und eine positiv; die letztere würde allein für die vorhandene Aufgabe passend seyn.

Will man diese Gleichung durch die Cardanische Regel auflösen, so muß man sie zuvörderst in eine andere verwandeln, in der das zweite Glied fehlt. Man setze zu diesem Behuf nach §. 194. $y = x + \frac{1}{3}.6 = x + 2$, so daß also $x = y - 2$. Substituirt man diesen Werth so erhält man

$$\begin{aligned} x^3 &= y^3 - 6y^2 + 12y - 8 \\ 6x^2 &= \quad\; 6y^2 - 24y + 24 \\ -3920 &= \qquad\qquad\quad -3920 \\ \hline & \quad y^3 - 12y - 3904 = 0 \end{aligned}$$

Die Cardanische Formel ist:

$$y = \sqrt[3]{\left(\frac{-C + \sqrt{(\frac{4}{27}B^3 + C^2)}}{2}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{-C - \sqrt{(\frac{4}{27}B^3 + C^2)}}{2}\right)},$$

in dem gegebenen Fall ist also $B = -12$, $C = -3904$. Diese Werthe gesetzt, so ist

$$y = \sqrt[3]{\left(\frac{3904 + \sqrt{(\frac{4}{27} \cdot - 1728 + 1524126)}}{2}\right)}$$

$$+ \sqrt[3]{\left(\frac{3904 - \sqrt{(\frac{4}{27} \cdot - 1728 + 1524126)}}{2}\right)}$$

$$= \sqrt[3]{\left(\frac{3904 + \sqrt{(-256 + 1524126)}}{2}\right)}$$

$$+ \sqrt[3]{\left(\frac{3904 - \sqrt{(-256 + 1524126)}}{2}\right)}$$

$$= \sqrt[3]{\left(\frac{3904 + 3903,968}{2}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{3904 - 3903,968}{2}\right)}$$

$$= \sqrt[3]{(3903,984)} + \sqrt{(0,032} = 15,7 + 0,3 = 16.$$

Da nun $x = y - 2$, so ist $x = 14$.

Dividirt man die Gleichung $x^3 + 6x^2 - 3920 = 0$, durch $x - 14$, so findet man $x^2 + 20x + 280 = 0$. Die Auflösung dieser Gleichung giebt

$$x^2 + 20x = -280$$

$$x^2 + 20x + 100 = -180$$

$$x + 10 = \pm\sqrt{(-180)}$$

$$x = -10 \pm \sqrt{(-180)}$$

woraus erhellet, daß die beiden andern Werthe der Gleichung unmöglich sind.

Auch hätte man durch Versuche zum Ziel kommen können, da aber 3920 eine große Zahl ist und eine Menge Faktoren enthält, so wäre auch dieser Weg mühsam gewesen; in der Folge werden wir Mittel angeben, die Versuche zu erleichtern.

5. Die Anzahl der Personen sey x, jeder legt daher zum Kapital $40x$, alle daher $40x^2$ zu, und dies giebt mit dem vorhandenen Kapital $8240 + 40x^2$. Sie

gewinnen damit vom 100 soviel als Personen sind, d. h. x, folglich ist der ganze Gewinn $\frac{8240x+40x^3}{100} = \frac{824x+4x^3}{10}$, davon nimmt jeder 10x, also alle $10x^2$, es bleibt daher $\frac{824x+4x^3}{10} - 10x^2$, und dies ist der Aufgabe nach = 224; die Grundgleichung ist daher

$$\frac{824x+4x^3}{10} - 10x^2 = 224$$

$$824x+4x^3-100x^2 = 2240 \quad (10$$

$$4x^3-100x^2+824x-2240=0$$

$$4)\quad x^3-25x^2+206x-560=0$$

Will man diese Gleichung durch die Cardanische Regel auflösen, und setzt also erst $x=y+\frac{25}{3}$, so erhält man eine Gleichung für y mit großen Zahlen und Brüchen, welche nach der Formel zu behandeln, sehr beschwerlich ist. Wir wollen also durch Versuche zum Ziel zu gelangen suchen. Die Faktoren von 560 sind: 1, 2, 4, 5, 7, 8......

Da die Gleichung gar keine Folge, sondern blos Wechselungen enthält, so braucht man nur mit positiven Werthen von x die Versuche anzustellen.

$x=1$ gesetzt giebt $1-25+206-560=-378$
$x=2$ " " " " $8-100+412-560=-240$
$x=4$ " " " " $64-400+824-560=-72$
$x=5$ " " " " $125-625+1030-560=-30$
$x=7$ " " " " $343-1225+1442-560=0$

7 ist

7 ist also eine Wurzel der Gleichung, dividirt man sie nun durch $x-7$, so erhält man:

$$x^2 - 18x + 80 = 0$$

$$x^2 - 18x = -80$$

$$x^2 - 18x + 81 = 1$$

$$x - 9 = \pm 1$$

$$x = 9 \pm 1 = \begin{matrix}10\\8\end{matrix}$$

Die beiden andern Wurzeln der Gleichung sind folglich 10 und 8.

Zu §. 216.

Aus I folgt: $x^6 = 20x^4 - 36x - 4y^2 + 92y - 36$.

Aus der durch die Multiplication mit x^3 aus II. entstandenen:

$x^6 = 18x^5 + 18x^3 - 6x^3y^3 + 20x^3y$; folglich ist

$$20x^4 - 36x - 4y^2 + 92y - 36 = 18x^5 + 18x^3 - 6x^3y^3 + 20x^3y.$$

Zu §. 217.

Seite 201 Zeile 2 von oben lies $B = K$ statt $B = A$.

Zeile 10 von oben lies b^6y statt b^9y.

Zeile 4 von unten lies $b^{12}y$ st. $b^{12}-y$.

Seite 203 Zeile 7 von unten lies $-a^3fy$ statt $-a^3fg$.

Zeile 5 von unten lies b^2f statt bf.

Zu §. 219.

Seite 207 Zeile 12 von oben lies $x = \frac{d+f+c-by}{a}$ statt $x = \frac{d+f+b-by}{a}$

Auflösung der Aufgabe am Ende vom Zusatz 2.

Die Gleichungen I. II. III. IV. haben alle x, es lassen sich also 4 Werthe von x bestimmen, und daraus ergeben sich 3 Gleichungen ohne x. Da in I. II, III. auch y sich findet, so muß in den aus ihnen gefundenen Werthen von x, und also auch in den drei von ihnen abgeleiteten Gleichungen y stehen; dadurch findet man drei Werthe von y, welche 2 Gleichungen ohne y geben. Da nun in I und II z vorhanden ist, so wird in den aus I und II gefundenen Werthen von y auch z vorkommen und dies also gleichfalls in den neu entstandenen beiden Gleichungen seyn; hieraus findet man einen doppelten Werth von z, der eine Gleichung giebt, in welcher wegen I t sich findet, und sich also daraus entwickeln läßt. — Durch Substitutionen findet man sodann die übrigen unbekannten Größen.

Zu §. 222.

Seite 211 Zeile 10 von oben lies $-bx+ab$ statt $-bx$.

Seite 212 Zeile 4 von oben lies seyn muß als multiplicirt worden, statt seyn muß.

Zu §. 225.

Seite 220 Zeile 12 von oben lies $x+1-\sqrt{-3}$ statt $x-1-\sqrt{-3}$.

Zu §. 226.

Beweis, daß $x^3 - 12x^2 + 48x - 64 = 0$, drei Wurzelgleichungen hat, deren jede $x - 4 = 0$.

Man dividire $x^3 - 12x^2 + 48x - 64$ durch $x - 4$.

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 - 12x^2 + 48x - 64 & x-4 \\
\cline{2-2}
x^3 - 4x^2 & x^2 - 8x + 16 \\
- \quad + & \\
\hline
\quad -8x^2 + 48x - 64 & \\
\quad -8x^2 + 32x & \\
\quad + \quad - & \\
\hline
\qquad 16x - 64 & \\
\qquad 16x - 64 & \\
\qquad - \quad + & \\
\hline
\end{array}
$$

Hieraus folgt

$$x^2 - 8x + 16 = 0$$

Dividirt man $x^2 - 8x + 16$ wiederum durch $x-4$, so findet man

$$
\begin{array}{l|l}
 & x-4 \\
\cline{2-2}
x^2 - 8x + 16 & x4- \\
x^2 - 4x & \\
- \quad + & \\
\hline
\quad -4x + 16 & \\
\quad -4x + 16 & \\
\quad + \quad - & \\
\hline
\end{array}
$$

Man hätte auch $x^2 - 8x + 16 = 0$ als eine unreine quadratische Gleichung auflösen, oder auch auf beiden Seiten die Quadratwurzel ausziehen können.

Eben so kann man durch die Division zeigen, daß $x - 4 = 0$, $x - 4 = 0$, $x - 3 = 0$ die Wurzelgleichungen der Gleichung $x^3 - 11x^2 + 40x - 48 = 0$ sind.

Zu §. 231.

Es sey n eine ganze, also 2n eine gerade, und $2n + 1$ eine ungerade Zahl; so ist

$(\sqrt{-a})^{2n} = [(\sqrt{-a})^2]^n = (\sqrt{-a} . \sqrt{-a})^n = (-a)^n$. Ist n eine gerade Zahl, so wird $(-a)^n$ positiv, ist sie ungerade, negativ

$(\sqrt{-a})^{2n+1} = (\sqrt{-a})^{2n} . \sqrt{-a} = (-a)^n . \sqrt{-a}$.

Ist also $-a$ eine mögliche Größe, so ist $(\sqrt{-a})^{2n} = (-a)^n$ offenbar auch möglich; hingegen $(\sqrt{-a})^{2n+1} = (-a)^n . \sqrt{-a}$ zufolge des Lehrsatzes im vorhergehendem §. eine unmögliche Größe.

(Anmerkung. Vielleicht macht jemanden die Anwendung des Beweises im vorhergehenden §. auf den vorliegenden Fall einige Schwierigkeit, darum wollen wir sie kurz mittheilen. Es sey $(-a)^n . \sqrt{-a} = c$, und c eine mögliche Größe; so ist $(-a)^{2n} . -a = c^2$, wo nun auch $(-a)^{2n}$ und c^2 positiv seyn müssen, man mag a oder c, + oder − setzen.)

Aus dem Vorhergehenden folgt, daß man $\sqrt{-a}$

unmöglich, in jeder Dignität von $c+\sqrt{-a}$, die ungeraden Glieder möglich und die geraden unmöglich sind. Wir wollen Kürze halber $\sqrt{-a} = \beta$ setzen, so ist $(c+\sqrt{-a})^m = (c+\beta)^m = c^m + \frac{m}{1} c^{m-1}\beta + \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} c^{m-2}\beta^2 \ldots\ldots$ Im ersten Gliede kömmt c allein vor und also ist es eine mögliche Größe; in jedem andern Gliede findet sich β und zwar in einer Dignität, deren Exponent um 1 kleiner ist, als die Zahl des Gliedes, folglich in jedem geraden Gliede in einer ungeraden, in jedem ungeraden Gliede in einer geraden Potenz; die ungeraden Potenzen von $\beta = \sqrt{-a}$ sind aber unmögliche, die geraden mögliche Größen. Die in jedem Gliede mit β als Factoren verbundenen Größen (die Coefficienten und die Dignitäten von c) haben nach §. 230. keinen Einfluß auf die Möglichkeit oder Unmöglichkeit des Gliedes worin sie sich finden.

Das was wir von einer Potenz von $c+\sqrt{-a}$ in Beziehung auf Möglichkeit und Unmöglichkeit der Glieder dargethan, gilt auch von jeder Potenz von $c+b\sqrt{-a}$, denn die möglichen Factoren haben, wie wie dies §. 230 gezeigt, keinen Einfluß auf die Möglichkeit oder Unmöglichkeit eines Produkts.

Zu §. 236.

Ist $c+b\sqrt{-a}$ eine Wurzel einer Gleichung, so ist es auch $c-b\sqrt{-a}$, also würde die Form der Gleichung seyn:

$$(x - c - b\sqrt{-a}) \cdot (x - + b\sqrt{-a}) \cdot (x - f)$$
$$(x - g) \ldots = 0$$

Nun ist $(x - c - b\sqrt{-a}) \cdot (x - c + b\sqrt{-a}) = x^2 - 2cx + c^2 + ab^2$; daher $(x^2 - 2cx + c^2 + ab)^2 \cdot (x - f) \cdot (x - g) \ldots = 0$ und hieraus ergiebt sich die Wahrheit der Behauptung von §. 236.

Zu §. 241.

Seite 238. Zeile 11. von oben lies $\frac{by^{m-2}}{e^{m-2}}$ statt $\frac{bx^{m-2}}{e^{m-2}}$.

Ist $x + 2 = y$, so ist $x = y - 2$, folglich

$$\begin{aligned} x^3 &= y^3 - 6y^2 + 12y - 8 \\ -4x^2 &= \quad -4y^2 + 16y - 16 \\ +5x &= \qquad\quad 5y - 10 \\ +8 &= \qquad\qquad + 8 \\ \hline & y^3 - 10y^2 + 33y - 26 = 0. \end{aligned}$$

Zu Zusatz 1. Ist $y = x + 3$, so ist $x = y - 3$, folglich

$$\begin{aligned} x^3 &= y^3 - 9y + 27y - 27 \\ -11x^2 &= -11y^2 + 66y - 99 \\ -46x &= \qquad -46y + 138 \\ 560 &= \qquad\qquad 560 \\ \hline & y^3 - 20y^2 + 47y + 572 = 0 \end{aligned}$$

Setzt man $y = 11$, so ist $1331 - 2420 + 517 + 572 = 0$
— $y = 13$, so ist $3197 - 3380 + 611 + 572 = 0$
— $y = -4$, so ist $-64 - 320 - 188 + 572 = 0$

Ist $z = x - 2$, so ist $x = z + 2$; folglich

$$\begin{aligned} x^3 &= z^3 + 6z^2 + 12z + 8 \\ -11x^2 &= -11z^2 - 44z - 44 \\ -46x &= -46z - 92 \\ 560 &= 560 \\ \hline & z^3 - 5z^2 - 78z + 432 = 0 \end{aligned}$$

Setzt man $z = 6$, so ist $216 - 180 - 468 + 432 = 0$

— $z = 8$, so ist $512 - 320 - 624 + 432 = 0$

— $z = -9$, so ist $-729 - 405 + 702 + 432 = 0$

Zu Zusatz 2. Ist $x = \frac{y}{2}$, so ist die neue Gleichung $\frac{y^3}{8} - \frac{11y^2}{4} - \frac{46y}{2} + 560 = 0$, woraus folgt $y^3 - 22y^2 - 184y + 4480 = 0$.

Setzt man $y = 16$, so ist $4096 - 5632 - 2944 + 4480 = 0$

— $y = 20$, so ist $8000 - 8800 - 3680 + 4480 = 0$

— $y = -14$, so ist $-2744 - 4312 + 2576 + 4480 = 0$

Ist $x = 2z$, so ist die neue Gleichung

$8z^3 - 44z^2 - 92z + 560 = z^3 - \frac{11}{2}z^2 - \frac{23}{2}z + 70 = 0$.

Setzt man $z = 4$, so ist $64 - 88 - 46 + 70 = 0$

— $z = 5$, so ist $125 - 137\frac{1}{2} - 57\frac{1}{2} + 70 = 0$

— $z = -\frac{7}{2}$, so ist $-42\frac{7}{8} - 67\frac{3}{8} + 40\frac{1}{4} + 70 = 0$

Zu §. 242.

Auflösung der im §. aufgestellten Aufgabe.

Um aus der Gleichung $x^5 - \frac{2}{3}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{8}x - 10 = 0$ die Brüche fortzuschaffen, suche man zuvörderst nach Lehrbuch Arithmetik §. 45. die kleinste Zahl, welche, wenn man mit ihr die Gleichung

multiplicirt, die Brüche in derselben verschwinden macht; dies ist 24.

Man setze also $y = 24x$, wo sodann $x = \frac{y}{24}$; so ist nach §. 241. $y^5 - \frac{2}{3}.24y^4 + \frac{1}{2}.24^2y^3 + \frac{3}{4}.24^3y^2 - \frac{1}{8}.24^4y - 10 = 0$

hieraus folgt

$$y^5 - 16y^4 + 388y^3 + 10368y^2 - 41472y - 10 = 0$$

Man hätte noch kürzer zum Ziel kommen können, wenn man $x = \frac{z}{5}$ gesetzt, weil $6 = 2.3$, und also die Potenzen von 2 bei y^2 und y hinreichend sind, die Brüche aufzuheben, dann ist nämlich

$$z^5 - \frac{2}{3}.6z^4 + \frac{1}{2}.6^2z^3 + \frac{3}{4}.6^3z^2 - \frac{1}{8}.6^4z - 10 = 0$$

woraus sich ergiebt:

$$z^5 - 4z^4 + 18z^3 + 162z^2 - 162z - 10 = 0$$

Zu §. 245.

Auflösung der im §. gegebenen Aufgabe.

Man soll aus der Gleichung $x^4 - 8x^3 \ldots\ldots = 0$ das zweite Glied wegschaffen.

Man setze dem §. zufolge $x = y - \frac{-8}{4} = y + 2$; so ist

$$x^4 = y^4 + 8y^3 + 24y^2 + 32y + 16$$
$$-8x^3 = \quad -8y^3 - 48y^2 + 48y - 64$$

. . . .

wo nun in der Summe y^3 wegfällt.

Zu §. 247.

Seite 247 Zeile 10 von oben lies hy^{m-1} statt hr^{m-1}.

Zu §. 248.

Seite 248 Zeile 10 von unten lies zu Wurzeln habe statt zu Zahlen habe.

Seite 249 Zeile 8 von oben lies $\frac{\alpha p}{m}$ statt $\frac{xp}{m}$.

Auflösung der Aufgabe.

Um die Gleichung $x^5 - 6x^3 - 12x^2 + 8x + 4 = 0$ in eine andere zu verwandeln, setze man $x = \frac{4}{y}$, so ist $\frac{4^5}{y^5} - 6 . \frac{4^3}{y^3} - 12 . \frac{4^2}{y^2} + 5 . \frac{4}{y} + 4 = 0$. Man multiplicire die ganze Gleichung mit y^5, so findet man $4^5 - 6 . 4^3 . y^2 - 12 . 4^2 . y^3 + 8 . 4 . y^4 + 4y^5 = 0$.

Ordnet man diese Gleichung nach y, so ist

$$4y^5 + 8 . 4 . y^4 - 12 . 4^2 y^3 - 6 . 4^3 . y^2 + 4^5 = 0$$

und schafft man den Coefficienten des ersten Gliedes durch die Division fort, so ist

$$y^5 + 8y^4 - 48y^3 - 96y^2 + 4^4 = 0.$$

Beantwortung der im §. aufgestellten Frage.

Man setze x gleich dem letzten Gliede der Gleichung (der bekannten Größe) dividirt durch y.

Zu §. 249.

S. 249 Zeile 8 von unten lies ganze statt geraden.

Seite 252 Zeile 11 von oben lies $= - 18$ statt $= - 10$.

Die Factoren von 1050 sind: 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 15 .... von denen jeder sowohl + als − seyn kann.

Man setze $x = + 1$, so findet man

$1 + 6 - 38 - 192 + 325 + 1050 = 1152$.

Ist $x = - 1$

$- 1 + 6 + 38 - 192 - 325 + 1050 = 576$.

Ist $x = + 2$

$32 + 96 - 304 - 768 + 650 + 1050 = 756$.

Ist $x = - 2$

$- 32 + 96 + 304 - 768 - 650 + 1050 = 0$.

Eine der Wurzeln der Gleichung ist also $- 2$; jetzt kann man entweder die Probe mit den folgenden Factoren weiter fortsetzen, oder die Gleichung mit $x + 2$ dividiren.

Geschieht das letztere, so erhält man

$x^4 + 4x^3 - 46x^2 - 100x + 525 = 0$.

Die Factoren von 525 sind: 1, 3, 5, 7 .... von denen man + 1, und − 1 nicht zu versuchen braucht, da man schon vorhin gesehen, daß dieses keine Wurzeln der Gleichung sind.

Man setze $x = + 3$, so ist

$81 + 108 - 414 - 300 + 525 = 0$

folglich + 3 wiederum eine Wurzel der Gleichung.

Dividirt man $x^4 + 4x^3 - 46x^2 - 100x + 525$

$=0$ durch $x-3$, so bekömmt man $x^3+7x^2-25x-175=0$.

Die Factoren von 175 sind 1, 5, 7, 35.

Da man 1 nicht zu versuchen hat, so mache man mit $+5$ den Anfang, so ist

$$125+175-125-175=0$$

hier sieht man leicht, daß auch -5 eine Wurzel seyn muß, denn dann ist

$$-125+175+125-175=0$$

Da nun -175 das Produkt aus $+5$ und -5 und einer noch unbekannteu Zahl der letzten Wurzel seyn muß, so dividire man -175 durch -25, wo man $+7$ zum Quotienten, also -7 als die fünfte Wurzel der Gleichung findet.

Zu §. 250.

Seite 254 Zeile 7 von unten lies $-124x$ statt -124.

Zu §. 251.

Seite 256 Zeile 6 von unten lies $Ax^{m-1}+Bx^{m-2}$ statt $A^{m-1}+B^{m-2}$.

Zu §. 252.

Seite 258 Zeile 6 von unten lies wenn statt da.

— — Zeile 3 von unten lies §. 249 st. §. 259.

Um die Gleichung

$$x^5+6x^4-38x^3-192x^2+325x+1050=0$$

auf $+2$ als einen Factor von 1050 zu prüfen, sehe man die Anleitung von §. 252.

Setzt man $x = 2$, so erhält man aus $x^4 + 6x^3 + 38x^2 - 192x + 325 + 525$,

$2^4 + 6 . 2^3 - 38 . 2^2 - 192 . 2 + 325 + 525$ dies ist $= 378$, also kann $+ 2$ nicht die Wurzel der Gleichung seyn.

Um zu wissen, ob es $- 2$ ist, suche man den Werth von $2 (2^4 - 38 . 2^2 + 325)$. Es ist aber $2 (2^4 - 38 . 2^2 + 325) = 2 (189) = 378$, folglich $- 2$, wie wir auch §. 249. Erläuterungen fanden, eine Wurzel der Gleichung.

Zu mehrerer Uebung wollen wir auch den Versuch mit $+ 3$ und $- 3$; wie auch mit $+$ und $- 5$ anstellen; hier erhält man, wenn man 3 statt x in die Gleichung setzt, und die ganze Gleichung mit 3 dividirt

$3^4 + 6 . 3^3 - 38 . 3^2 - 192 . 3 + 325 + 350$ und das ist $= 0$.

Sollte nun $- 3$ auch eine Wurzel der Gleichung seyn, so müßte $2 (3^4 - 38 . 3^2 + 325) =$ Null seyn; es ist aber $= 128$, folglich $- 3$ keine Wurzel.

Bei $+ 5$ erhält man

$$5^4 + 6 . 5^3 - 38 . 5^2 - 192 . 5 + 325 + 210$$

Da dies nun $= 0$, so ist $+ 5$ eine Wurzel der Gleichung.

Ferner ist $2 (5^4 - 38 . 5^2 + 325) = 0$, also ist auch $- 5$ eine Wurzel der Gleichung.

Zu §. 253.

Seite 259 Zeile 9 von oben lies Px^3 statt PQ^3.

Zu §. 256.

Seite 262 Zeile 11 von oben lies $- 25$ statt $+ 25$.

Anmerkung. Bei dem im §. aufgestellten Beispiel sind erstlich die Factoren und so dann die Summen den Regeln, die im Vorhergehenden aufgestellt worden, gemäß, angegeben.

Versuche bei der Gleichung: $x^4 - 43x^2 + 18x + 360 = 0$.

Die Factoren mit welchen man Versuche anstellen will, seyen, da + oder − 1, nicht zur Wurzel dienen kann, wie eine leichte Betrachtung der Wurzel zeigt

+2,	+3,	+4,	+5,	+6	...	−2,	−3,	−4,	−5,	−6
+180,	+120,	+90,	+72,	+60	...	−180,	−120,	−90,	−72,	−60
+198,	+158,	+108,	+90,	+78	...	−152,	−102,	−72,	−54,	−42
+99,	+46,	+27,	+18,	+13	...	+81,	+34,	+18,		+7
+56,	+3,	−16,	−25,	−30	...	+28,	−9,	−25,		−36
+28,	+1,	−4,	−5,	−5	...	−14,	+3,			+6
+14,		−1,	−1			−7,	−1			−1
		0,	0,				0,			0

Die Wurzeln der Gleichung sind also 4, 5, − 3, − 6.

Zu §. 260.

Seite 269 Zeile 4 von oben lies beidemal q statt g.

Setzt man in die Gleichung $x^4 - 4x^3 - 10x^2 + 80x - 100 = 0$, $x = 1$, so erhält man: $1 - 4 - 10 + 80 - 100 = - 33$; setzt man $x = 2$, so ist $16 - 32 - 40 + 160 - 100 = + 4$.

Setzt man $x = 1{,}8$, so erhält man:

$10{,}4976 - 23{,}328 - 32{,}4 + 144 - 100 = - 1{,}2304$;

setzt man hingegen $x = 1{,}9$ so findet man:

$13{,}0321 - 27{,}436 - 36{,}1 + 152 - 100 = + 1{,}4961$.

Zur Anmerkung.

Man setze x + 1, 9, substituire aber nur bei jedem Theil der Gleichung bis zu den zweiten Gliedern incl. in welchen p sich findet, weil die übrigen in denen p^2, p^3, p^4 vorhanden ist, weggelassen worden, so ist

$$\begin{array}{rcll} x^4 & = & 13,0321 & + 27,436 \; p \ldots \\ -4x^3 & = & 27,436 & - 43,32 \; p \ldots \\ -10x^2 & = & -36,1 & - 38 \; p \ldots \\ +80x & = & 152 & + 80 \; p \ldots \\ -100 & = & -100 & \\ \hline & & 1,4961 & + 26,756 \; p = 0 \\ \hline & & 26,756 \; p & + - 1,4961 \end{array}$$

$$\text{also } p = -\frac{1,4961}{26,756} = -0,056$$

Zu §. 262.

Seite 272 Zeile 4 von oben lies $\frac{33}{42,17} = 0,78$ statt $\frac{33}{42,17}$ 0,78.

Ebend. Zeile 7 von unten lies 0,062 statt 0062.

Zu §. 263.

Auflösung der Aufgaben.

Zuvörderst müssen wir uns überzeugen, daß 9 und 10 Grenzen einer Wurzel der Gleichung:

$x^3 + x^2 - 166x + 660 = 0$ sind.

Ist x = 9, so ist 729 + 81 − 1494 + 660 = − 24.

Ist $x = 10$, so ist $1000 + 100 - 1660 + 660 = -100$.

Also fällt wirklich eine Wurzel zwischen 9 und 10 und zwar näher an 9 als an 10.

Man setze $x = 9 + p$, so ist

$$x^3 = 729 + 243p + 27p^2 + p^3$$
$$x^2 = 81 + 18p + p^2$$
$$-166x = -1494 - 166p$$
$$+660 = 660$$
$$-24 + 95p + 28p^2 + p^3 = 0$$

Setzt man $-24 + 95p = 0$, so ergiebt sich

$$95p = 24$$
$$p = \tfrac{24}{95} = 0{,}252$$

Es ist aber

$$-24 + 95p + 28p^2 + p^3 = 0$$
$$95p + 28p^2 + p^3 = 24$$
$$p\,(95 + 28p + p^2) = 24$$

$$p = \frac{24}{95 + 28 \cdot p + p^2} = \frac{24}{95 + 28 \cdot 0{,}25 + 0{,}25^2}$$

$= \frac{24}{102{,}118} = 0{,}234\ldots$; so daß also die Wurzel $9{,}234$.

Will man die Wurzel noch genauer haben, so nehme man die obige Gleichung für p

$$p^3 + 28p^2 + 95p - 24 = 0$$

und setze statt $p = 0{,}234 + t$, so wird

$$p^3 = 0{,}012812904 + 0{,}164268\, t \ldots$$
$$+ 28p^2 = 1{,}533168 \quad + 13{,}104 \quad t \ldots$$
$$+ 95p = 22{,}23 \quad + 95 \quad t$$
$$- 24 = - 24$$
$$- 0{,}224019096 + 108{,}268268\, t \ldots$$

folglich $t = \frac{0{,}224019096}{108{,}268268} = 0{,}002068$; also die vollständige Wurzel $9 + p + t = 9 + 0{,}234 + 0{,}002068 = 9{,}236068$.

Zu §. 269.

$$x + y + z = 12 \qquad 3x + 6y + 12z = 102$$
$$x = 12 - y - z \qquad 3x = 102 - 6y - 12z$$
$$(3) = x = 34 - 2y - 4z$$
$$12 - y - z = 34 - 2y - 4z$$
$$y = 22 - 3z$$
$$x = 12 - y - z = 12 - 22 + 3z - z = - 10 + 2z$$

Zu §. 271.

Auflösung der Aufgaben.

1. Die Anzahl der Männer sey x, der Frauen y, der Kinder z, so ist $x + y + z = 12$; ferner wegen der Zahlung, wo man 5 Rthlr 20 gr. = 140 Groschen setzen muß, $16x + 8y + 6z = 140$

$$x + y + z = 12 \qquad 16x + 8y + 6z = 140$$
$$x = 12 - y - z \qquad 16x = 140 - 8y - 6z$$
$$x = \frac{140 - 8y - 6z}{16} = \frac{70 - 4y - 3z}{8}$$

$12 - y$

$$12 - y - z = \frac{70 - 4y - 3z}{8}$$

$$96 - 8y - 8z = 70 - 4y - 3z$$

$$26 - 5z = 4y$$

$$\frac{26 - 5z}{4} = y$$

$$x = 12 - \frac{26 - 5z}{4} - z = \frac{48 - 26 + 5z - 4z}{4} = \frac{22 + z}{4}.$$

Das Wesen dieser Aufgabe fordert, daß x, y und z nur ganze, positive Zahlen bedeuten können. x ist positiv, sobald man z positiv setzt, und kann auch unter diesen Umständen nie Null werden; damit aber y positiv sey und auch nicht Null werde, muß $5z < 26$ angenommen werden, also kann es höchstens 5 seyn, da es eine ganze Zahl seyn muß.

Jetzt frägt sich noch, wie muß z genommen werden, damit x und y ganze Zahlen seyen.

$x = \frac{22+z}{4} = 5\frac{1}{2} + \frac{z}{4}$, soll dies eine ganze Zahl werden, so muß $\frac{z}{4} = n + \frac{1}{2}$ oder $z = 4n + 2$ d. h. man muß z so nehmen, daß es ein Vierfaches (aber von keinem Bruch) $+ 2$ ist.

Man setze $n = 0$, so ist $z = 4.0 + 2 = 2$.

Man setze $n = 1$, so ist $z = 4.1 + 2 = 6$, dies ist aber aus andern in der Aufgabe vorhandenen Gründen nicht möglich, da y nicht > 5 seyn kann.

Aus allen diesen ergiebt sich, daß y nur einen

Werth haben, $=2$ seyn, kann, also ist $x = \frac{22+2}{4} = 6$

und $y = \frac{26-5z}{4} = \frac{26-10}{4} = 4.$

Es waren also 6 Männer, 4 Frauen, und 2 Kinder gegenwärtig gewesen, die Männer hatten 6.16 Groschen $=4$ Thaler, die Frauen 4.8 Groschen $=1$ Thaler 8 Groschen und die Kinder 2.6 Groschen $=12$ Groschen; zusammen also 6 Thaler 20 Groschen gezahlt.

Anmerkung. Ich habe mit Fleiß diese Aufgabe gewählt, um zu zeigen, wie eine an sich unbestimmte Aufgabe durch andere in dem Wesen derselben liegende Bedingungen bestimmt wird.

2. Die Anzahl der Ochsen heiße x, der Pferde y; so ist $31x = 65y + 7$; also $x = \frac{65y-7}{31} = 2y + \frac{3y+7}{31}$

x und y müssen in dieser Aufgabe positiv seyn; man sieht bald ein, daß x immer positiv wird, wenn man y positiv nimmt. Aber y muß selbst eine ganze Zahl seyn und so genommen werden, daß x eine ganze Zahl werde; aus dem gefundenen Werth von $x = 2y + \frac{3y+7}{31}$ ergiebt sich, daß x nur eine ganze Zahl wird, wenn $\frac{3y+7}{31}$ eine ganze Zahl ist.

Man setze $\frac{3y+7}{31} = r$, wo r eine ganze positive Zahl bedeute, und bestimme y nach r, so ist

$$\frac{3y+7}{31} = r$$

$$3y + 7 = 31r$$

$$3y = 31r - 7$$

$$3) \quad y = \frac{31r-7}{3} = 10r + \frac{r-7}{3}$$

Soll y eine ganze Zahl werden, so muß $\frac{r-7}{3}$ eine ganze Zahl seyn; man nenne $\frac{r-7}{3} = t$, und t sey eine ganze Zahl, so ist $r - 7 = 3t$ und $r = 3t + 7$. Wir hätten also folgende Formeln:

$$r = 3t + 7; \; y = 10r + \frac{r-7}{3}; \; x = 2y + \frac{3y+7}{31}.$$

Man setze $t = 0$, so ist

$$r = 7; \; y = 70; \; x = 140 + \frac{217}{31} = 147.$$

$$147.31 = 70.65 + 7.$$

Ist $t = 1$, so ist

$$r = 3 + 7 = 10; \; y = 10.10 + \frac{10-7}{3} = 101; \; x = 202 + \frac{310}{31} = 212$$

$$212.31 = 101.65 + 7$$

Ist $t = 2$, so ist

$$r = 6 + 7 = 13; \; y = 10.13 + \frac{13-7}{3} = 132; \; x = 264 + \frac{403}{31} = 277.$$

$$277.31 = 132.65 + 7.$$

Man sieht bald, daß je größer man t nimmt, desto größer muß auch x und y werden.

Noch kann man die kleinsten Werthe für x und y suchen.

Um sich dies zu erleichtern, bestimme man x und y nach t; so ist $y = 10r + \frac{r-7}{3} = 10(3t+7) + \frac{3t}{3} = 31t + 70$. $x = 2(31t+70) + \frac{3(31t+70)+7}{31} = 62t + 140 + \frac{93t+217}{31} = 65t + 147$.

t muß stets eine ganze Zahl oder Null seyn; x und y werden um so kleiner, je kleiner t genommen wird; soll x und y noch kleiner werden, als wenn $t = 0$, so muß man t minus setzen, jedoch so, daß x und y positiv bleiben, und nicht Null werden: Soll x positiv und nicht Null seyn, so muß, (da $x = 65t + 147$,) $65t < 147$, also $t < 2\frac{17}{65}$ seyn; und soll y positiv und nicht Null seyn, so muß da $y = 31t + 70$, $31t \angle 70$ d. h. $t < 2\frac{8}{31}$; dies giebt $t = -2$, daher $r = -6 + 7 = 1$, $y = 10 + \frac{-6}{3} = 8$, $x = 16 + \frac{31}{31} = 17$

$$17 . 31 = 8 . 65 + 7$$

3. Die Anzahl der Zweigroschenstücke sey x, die der Viergroschenstücke y und die der Achtgroschenstücke z; so soll $x + y + z = 50$ und $2x + 4y + 8z = 193$ (8 Thaler in Groschen ausgedrückt seyn).

Aus $x + y + z = 50$ folgt: $x = 50 - y - z$ und aus $2x + 4y + 8z = 192$ folgt: $x = 96 - 2y - 4z$; dies giebt die Gleichung

$$\frac{50-y-z=96-2y-4z}{y=46-3z}$$

und also $x=50-(46-3z)-z=50-46+3z-z$ $=4+2z$

Das Wesen der Aufgabe fordert, daß x, y und z ganze, positive Zahlen; nimmt man z ganz und positiv, so wird $x=4+2z$ immer positiv werden; allein $y=46-3z$ fordert, daß $3z<46$, d. h. $z<15\frac{1}{3}$ oder daß z höchstens 15 sey.

Es würde zu weitläuftig seyn, alle Werthe von x und y, nach z von 1 bis 15 zu bestimmen; wir wollen nur $z=1$ und $z=15$ annehmen.

Ist $z=1$, so ist $x=4+2.1=6$ und $y=46-3.1=43$

$x+y+z=6+43+1$; Werth $2.6+43.4+1.8=12+172+8=192$

Ist $z=15$, so ist $x=4+2.15=34$ und $y=46-3.15=1$

$x+y+z=34+1+15=50$; Werth $2.34+1.3+8.15=68+4+120=192$.

4. Die beiden Zahlen heißen x und y, die Summe ihrer Quadrate sey z^2. Man setze $z=x+t$; so ist

$$\frac{x^2+y^2=x^2+2tx+t^2}{y^2=2tx+t^2}$$

$$\frac{y^2=2tx+t^2}{y^2-t^2=2tx}$$

$$2t)\ \frac{y^2-t^2}{2t}=x$$

wo man nun y und t nach Willkühr annehmen kann.

Es sey $y=5$, $t=2$; so ist $x=\frac{5^2-2^2}{4}=\frac{25-4}{4}$ $=\frac{21}{4}$ also $x^2+y^2=\left(\frac{21}{4}\right)^2+5^2=\frac{441}{16}+25=\frac{441}{16}$ $+\frac{400}{16}=\frac{841}{16}$. Es ist aber $\frac{841}{16}$ wirklich eine Quadratzahl, ihre Wurzel ist $\frac{29}{4}$.

Sollen x und y positiv bleiben, so muß man t kleiner setzen als das positiv angenommene y, denn alsdann ist y^2-t^2 positiv und also auch $\frac{y^2-t^2}{2t}$.

Sollen ferner x und y ganze Zahlen seyn, so muß $2t$ ein Theiler von y^2-t^2 genommen werden; dies fordert erstlich, daß y^2-t^2 eine gerade Zahl sey; also muß man entweder y und t beide gerade, oder beide ungerade nehmen; zweitens muß $\frac{y^2-t^3}{2t}$ eine gerade Zahl seyn. Da nun $\frac{y^2-t^2}{t}=\frac{y^2}{t}-t$, so muß man x und t so nehmen, daß t ein Theiler von y^2.

Es sey $y=4$, $t=2$, so ist $x=\frac{16-4}{4}=3$

$$3^2+4^2=25=5^2$$

Es sey $y=9$, $t=3$, so ist $x+\frac{81-9}{6}=12$

$$12^2+9^2=225=15^2$$

Erläuterungen

der

Fortsetzung

der

Anfangsgründe der Geometrie.

Zu §. 2.

Th, ABq = ACq + CBq

Data ACB = R

CE = AC

CB = CF

DH ‡ AF ‡ BG

HG ‡ AF ‡ AD

KA ‡ HI ‡ LB

ACED = ACq

weil AC ‡ DE

EC ‡ DA

AC = EC

ACE = 2R — ACB = R

CBGF = CBq

weil CB ‡ FG

CF ‡ BG

CB = CE

FCB = 2R — ACB = R

AKLB = ABq

weil KA ∦ LB

KH ∦ CA

KA ∦ CH

KA = CH (s. Lehrb. Geom. §. 76.)

CH ∦ LB

HL ∦ CB

CH = LB

KA = und ∦ CH = und ∦ LB

KL = und ∦ AB.

△ ABC ≅ △ ECH

weil AC = EC

CB = CF = EH

ACB = HEC = R

CBA = EHC = KAC

CAB + CBA = R (s. Lehrbuch Geom. §. 72)

CAB + KAC = R

also auch AKL = KLB = LBA = R (s. Lehrbuch Geometrie §. 78)

△ DKA ≅ △ ACB

weil DA = AC

KDA = ACB = R

DAC = KAB = R

DAC − KAC = KAB − KAC

DAK = CAB

AK = AB = KL = LB

KAIM = KACH = ACq

MLIB = HCLB = CBq

$$KAIM + MLIB = ACq + CBq$$
$$KAIM + MLIB = ABq$$
$$\text{Ergo } ABq = ACq + CBq$$

Zu §. 3.

Th. $BCq = ABq + ACq$

Dat. $BAC = R$

$ACED = ACq$

$FE = AB = EH$

$FEHG = FEq = ABq$

$DI = AB$

$\triangle ABC \cong \triangle CID$

weil $AC = CD$

$AB = DI$

$BAC = CDI = R$

$BC = CI$

$\triangle CDI \cong \triangle GFI$

$DI = FE = GF$

$FE = ID$

$FE + EI = EI + ID$

$FI = ED = CD$

$GFI = CDI = R$

$GI = CI$

$\triangle GFI \cong \triangle AHG$

weil $GF = GH$

$HE = AB$

$HE + AH = AH + AB$

$AE = BH$

$$\text{und da } AE = ED = FI$$
$$\overline{FI = BH}$$
$$GFI = GHB = R$$
$$\overline{GI = BG}$$
$$\triangle GHB \cong \triangle ABC$$
$$GH = FE = AB$$
$$BH = AE = AC$$
$$GHB = BAC = R$$
$$\overline{GB = BC}$$
$$GBA = BCA$$
$$GBA + ABC = ABC + BCA = R$$
$$\overline{BCGI = BCq}$$

$BCq = BCGI = ACGHA + \triangle ABC + \triangle GHB$; $ACq + ABq = ACED + FEGH = ACIGHA + \triangle GFI + \triangle CID$; da nun $\triangle ABC + \triangle GHB = \triangle GFI + \triangle CID$, so ist $BCq = ACq + ABq$.

Zur Anmerkung vom §. 3.

Ist (Fig. I.*) $AC = AB$, so errichte man über AC das Quadrat ACED, verlängere AC so daß AG $= AB = AC$ und eben so verlängere man DE bis $EF = AG$ und ziehe GF, GB und BC; so ergiebt sich daß $\triangle ABC \cong \triangle CED \cong \triangle GEF \cong \triangle ABG$ und also $BC = CE = EG = BG$. Da nun $GBA = BCA$, also $GBA + ABC = BCA + ACB = R$, so ist GBCE das Quadrat von BC.

---

*) Die Figuren zu den Erläuterungen finden sich auf der letzten Kupferplatte und sind mit römischen Ziffern bezeichnet.

Es ist aber BCq = $\triangle$ GEC + $\triangle$ GAB + $\triangle$ BAC
ABq + ACq = $\triangle$ GEC + $\triangle$ GEF + $\triangle$ CED
da nun $\triangle$ GAB + $\triangle$ BAC = $\triangle$ GEF + $\triangle$ CED

so ist BCq = ABq + ACq.

Zu §. 4.

$\triangle$ DGH $\cong$ $\triangle$ GCF $\cong$ $\triangle$ FEB $\cong$ $\triangle$ AEH, weil DH = GC = FB = AE und DG = FC = EB = AH und die Winkel bei D, C, B, A rechte Winkel sind.

AHMK ist das Quadrat von AH, denn das Viereck ist rechtwinkligt und AH = DG = HM.

Da GC = DH = GM, so ist GCML = GCq = AEq.

DC = CB und GC = CL, also DC − GC = CB − CL d. h. DG = LB; ferner DH = GM = LM.

Daß $\triangle$ DGH + $\triangle$ AEH + $\triangle$ FEB + $\triangle$ GCF = DGHM + MLKB findet man auf folgende Weise:

DGHM = $\triangle$ DGH + $\triangle$ GHM
$\triangle$ GHM $\cong$ $\triangle$ DGH $\cong$ $\triangle$ AEH

DGHM = $\triangle$ DGH + $\triangle$ AEH
DGHM = MLKB
$\triangle$ DGH $\cong$ $\triangle$ GCF
$\triangle$ AEH $\cong$ $\triangle$ FEB

MLKB = $\triangle$ GCF + $\triangle$ FEB.

Zu §. 5.

Th: BDq = ABq + ADq

Dat. BAD = R

ACB = ACD = R

$\triangle$ ABC ∽ $\triangle$ BAD nach Lehrbuch Geometrie §. 158.

BC : AB = AB : BD

ABq = BC $\times$ BD.

$\triangle$ ACD ∽ $\triangle$ BAD

CD : AD = AD : BD

ADq = CD $\times$ BD

ABq + ADq = BC $\times$ BD + CD $\times$ BD
= (BC + CD) BD = BDq.

Zu §. 6.

Th. AB $\times$ CD + BC $\times$ AD = AC $\times$ BD.

Erster Fall.

Dat. BAC = CAD

$\triangle$ BAG ∽ $\triangle$ CAD

weil BAC = CAD

ABD = ACD

AB : BG = AC : CD

AB $\times$ CD = AC $\times$ BG

$\triangle$ ABC ∽ $\triangle$ AGD

weil CAD = BAC

$$ACB = ADB$$

$$BC : AC = GD : AD$$

$$BC \times AD = AC \times GD$$

$$AB \times CD = AC \times BG$$

Ergo $AB \times CD + BC \times AD = AC \times BG + AC \times GD = (BG + GD)\, AC = AC \times BD.$

Zweiter Fall.

Data: $ABC > CAD$ und $BAE = CAD$

$$\triangle BAE \backsim \triangle CAD$$

weil $BAE = CAD$

$$ABD = ACD$$

$$AB : BE = AC : CD$$

$$AB \times CD = AC \times BE$$

$$\triangle AED \backsim \triangle ABC$$

weil $BAE = CAD$

$$BAE + EAC = CAD + EAC$$

$$BAC = EAD$$

$$ADB = ACB$$

$$AD : ED = AC : BC$$

$$BC \times AD = AC \times ED$$

$$AB \times CD = AC \times BE$$

Ergo $AB \times CD + BC \times AD = AC \times BE + AC \times ED = (BE + ED)\, AC = AC \times BD.$

Zur Anmerkung von §. 6.

Beweis des pythagorischen Lehrsatzes aus dem ptolomäischen.

Fig. VI. verbinde man die Endpuncte der Durch-

messer AE und BD durch gerade Linien; so ist ABED ein Rechteck, denn DAB, ABE, BED, EDA sind rechte Winkel, weil sie als Peripheriewinkel auf einem halben Umkreis ruhen. Es ist also AB = DE, AD = BE. Nun ist AB $\times$ DE + AD $\times$ BE = AE $\times$ BD, d. h. $AB^2 + AD^2 = BD^2$.

Zu §. 9.

Zur Erläuterung der Sätze am Ende des §.

Es sey Fig. 8. φ der Bogen AB, so ist sin. φ = BD = sin. ACB; ist nun ACB = FCH, so ist BD = FG = sin. FCH = sin. ACF; folglich sin. für den Bogen AF und für den Bogen FH = AB; es ist aber AF = AH — FH = $\pi - \varphi$; also sin. φ = sin. $(\pi - \varphi)$. Ist HCI = ACB, so ist GI = BD, nur daß GI die entgegengesetzte Lage hat; also BD = — GI; es ist aber GI = sin. des erhabenen Winkels ACI, und der dazu gehörige Bogen AI ist = AH + HI = AH + AB = $\pi + \varphi$; also BD = sin. φ = — sin. $(\pi + \varphi)$.

ACM sey = ACB, so ist DM = BD; es ist aber DM der Sinus des erhabenen Winkels ACM, dessen Bogen die ganze Peripherie weniger AM = AB, oder $2\pi - \varphi$, also ist sin. φ = — sin. $(2\pi - \varphi)$.

Zu §. 11.

Beweis des Satzes: der Sinus eines negativen Winkels oder Bogens ist gleich dem entgegengesetzten Sinus eines gleich großen positiven Winkels oder Bogens.

Wir wollen den Satz für alle 4 Quadranten betrachten.

Fig. VIII. ist ACM ein negativer Winkel im ersten Quadranten, ACB sey ihm gleich, so ist BD = DM, nur daß DM die entgegengesetzte Lage von BD hat.

ACI ist ein negativer Winkel im zweiten Quadranten, ihm sey ACF gleich, so ist 180° — ACI = 180° — ACF, d. h. HCI = FCH, also GI = FG, nur daß GI die entgegengesetzte Lage von FG hat.

Der erhabene Winkel ACF im dritten Quadranten ist ein negativer Winkel; ihm ist der positive Winkel ACI gleich, darum FCH = HCI, und FG = GI, nur daß beide eine entgegengesetzte Lage haben.

Im vierten Quadranten sei der erhabene negative Winkel ACB gleich dem positiven erhabenen Winkel ACM, so ist ACM = ACB, daher DM = BD, nur daß ihre Lage entgegengesetzt ist.

Zu §. 12.

Beweis des Satzes: der Cosinus eines negativen Winkels oder Bogens ist gleich dem Cosinus des eben so großen positiven Winkels oder Bogens. s. Fig. 8.

1. Im ersten Quadranten ist CD sowohl cos. ACM als cos. ACD; es ist aber ACM = ACB, nur daß der erstere negativ, der zweite positiv ist.

2. Im zweiten Quadranten ist CG = cos. ACI = cos. ACF; es ist aber ACI = ACF, nur ist ACI negativ und ACF positiv.

3. Im dritten Quadranten ist CG der Cosinus des erhabenen negativen Winkels ACF und des erhabenen positiven Winkels ACI; es ist aber ACF = ACI, denn ACF = 2R + FCH und ACI = 2R + HCI und FCH = HCI.

4. Im vierten Quadranten ist CD cos. des erhabenen negativen Winkels ACB und des erhabenen positiven Winkels ACM; es ist aber ACB = 2R + BCH und ACB = 2R + MCH; es ist aber BCH = MCH.

Zu §. 14.

Die Tangente des erhabenen positiven Winkels ACM im dritten Quadranten Fig. 10. ist AB, und des erhabenen positiven Winkels ACR = AG.

Was die Tangenten der negativen Winkel betrifft, so ist im ersten Quadranten AG = tg. — ACR = AB = tg. ACN, nur daß AG — und AB + ist; es ist aber ACN = ACR; im zweiten Quadranten ist AB = tg. — ACM = AG = tg. ACF, nur ist AB + und AG —, es ist aber ACM = ACF; im dritten Quadranten ist AG = tg. — ACF = AB = tg. ACM, wo ACF und ACM erhabene Winkel sind, hier ist

ACF = 2R + FCD = 2R + DCM = ACM, aber AG ist negativ und AB positiv; im vierten Quadranten endlich ist AB = tg. — ACB = AG = tg. ACR, nur ist AB + und AG —; es ist aber ACB = 2R + BCD = 2R + RCD = ACR.

Zu §. 20.

cos. 40° = cos. 320° = cos. 400° = cos. 680° = cos. 760° u. s. w.

cos. 40° = — cos. 140° = — cos. 220° = — cos. 500° = — cos. 580° u. s. w.

Zu §. 21.

tg. 40° = tg. 220° = tg. 400° = tg. 580° = tg. 760° u. s. w.

tg. 40° = — tg. 140° = — tg. 320° = — tg. 500° = — tg. 680° u. s. w.

Zu §. 22.

cot. 40° = cot. 220° = cot. 400° = cot. 580° = cot. 760° u. s. w.

cot. 40° = — cot. 140° = — cot. 320° = — cot. 500° = — cot. 680° u. s. w.

Z §. 23.

$\sec.\ \varphi = \sec.\ (2\pi + \varphi) = \sec.\ (2n\pi + \varphi)$

$\sec.\ \varphi = \sec.\ (2\pi - \varphi) = \sec.\ (2n\pi - \varphi)$

$\sec.\ \varphi = -\sec.\ (\pi - \varphi) = \sec.\ [(2n+1)\pi - \varphi]$

$\sec.\ \varphi = -\sec.\ (\pi + \varphi) = \sec.\ [(2n+1)\pi + \varphi]$

In Worten ausgedrückt: die Secanten aller Winkel, deren Unterschied oder Summe ein gleiches Vielfaches von π ist, sind gleich und einstimmig; hingegen sind die Secanten deren Unterschied oder Summe ein ungerades Vielfaches von π ist, gleich aber entgegengesetzt.

$\sec. 40^\circ = \sec. 320^\circ = \sec. 400^\circ = \sec. 680^\circ = \sec. 760^\circ$ u. s. w.

$\sec. 40^\circ = -\sec. 140^\circ = -\sec. 220^\circ = -\sec. 500^\circ = -\sec. 580^\circ$ u. s. w.

$\text{cosec.}\, \varphi = \text{cosec.}\, (2\pi + \varphi) = \text{cosec.}\, (2n\pi + \varphi)$

$\text{cosec.}\, \varphi = \text{cosec.}\, (\pi - \varphi) = \text{cosec.}\, [2n + 1)\pi - \varphi]$

$\text{cosec.}\, \varphi = -\text{cnsec.}\, (2\pi - \varphi) = -(\text{cosec.}\, [(2n + 1)\pi + \varphi)$

$\text{cosec.}\, \varphi = -\text{cosec.}\, (2\pi - \varphi) = -\text{cosec.}\, (2n\pi - \varphi)$

In Worten dargestellt: Alle Winkel, deren Summe ein ungerades Vielfaches oder deren Unterschied ein gerades Vielfaches von π ist haben gleiche einstimmige Cosecanten; alle Winkel hingegen deren Summe ein gerades Vielfaches oder deren Unterschied ein ungerades Vielfaches von π ist, haben gleiche aber entgegengesetzte Cosecanten.

$\text{cosec.}\, 40^\circ = \text{cosec.}\, 140^\circ = \text{cosec.}\, 400^\circ = \text{cosec.}\, 500^\circ = \text{cosec.}\, 760^\circ$ u. s. w.

$\text{cosec.}\, 40^\circ = -\text{cosec.}\, 220^\circ = -\text{cosec.}\, 320^\circ = -\text{cosec.}\, 580^\circ = -\text{cosec.}\, 680^\circ$ u. s. w.

Zu §. 25.

Zu 1.

$\triangle ABC \backsim \triangle DEC$, daher $AB : BC = DE : EC$ d. h. $\sin. x : \cos. x = \text{tg.}\, x : 1$ und also $\sin. x = \text{tg.}\, x \,.\, \cos. x.$

Zu 2.

Aus der vorhergehenden Proportion folgt: $tg. x = \frac{sin. x}{cos. x}$ und setzt man nach Lehrbuch §. 8, $cos. x = \sqrt{(1 - sin. x^2)}$ so erhält man $tg. x = \frac{sin. x}{\sqrt{(1 - sin. x^2)}}$.

Zu 3.

$\triangle ABC \backsim \triangle GFC$, weil $BAC = GCF$, da $AB \mathbin{\#} FC$, also $BC : AB = GF : FC$ d. h. $cos. x : sin. x = cot. x : 1$, folglich $cos. x = cot. x . sin. x$.

Zu 4.

Aus der Proportion in 3 folgt: $cot. x = \frac{cos. x}{sin. x}$.

Zu 5.

Setzt man $\sqrt{(1 - cos. x^2)}$ statt $sin. x$, so ist $cot. x = \frac{cos. x}{\sqrt{(1 - cos. x^2)}}$.

Zu 6.

Nach 1 ist $sin. x = tg. x . cos. x$, substituirt man nun $\frac{1}{sec. x}$ für $cos. x$, so erhält man $sin. x = tg. x \frac{1}{sec. x} = \frac{tg. x}{sec. x}$; und da $sec. x = \sqrt{1 + tg. x^2}$; so ist $sin. x = \frac{tg. x}{\sqrt{(1 + tg. x^3)}}$.

Zu 7.

Aus 1 folgt

$cos. x = \frac{sin. x}{tg. x}$, da nun nach 6 $sin. x = \frac{tg. x}{\sqrt{(1 + tg. x^2)}}$, so ist $cos. x = \frac{\frac{tg. x}{\sqrt{(1 + tg. x^2)}}}{tg. x} = \frac{1}{\sqrt{(1 + tg. x^2)}}$

Zu 8.

$\triangle$ DEC $\sim$ $\triangle$ GFC, weil EDC = GCF, da DE ‡ FC, also DE : EC = FC : GF d. h. tg. x : 1 = 1 : cot. x, folglich tg. x . cot. x = 1.

Zu 9.

Es folgt aus 8 : $\text{tg. } x = \frac{1}{\text{cot. } x}$

Zu 10.

so wie auch : $\text{cot. } x = \frac{1}{\text{tg. } x}$

Zu §. 29.

$$\text{XVIII. tg. } (\alpha - \beta) = \frac{\sin. (\alpha - \beta)}{\cos. (\alpha - \beta)} =$$

$$\frac{\sin. \alpha . \text{cosin. } \beta - \cos. \alpha . \sin. \beta}{\cos. \alpha . \cos. \beta + \sin. \alpha . \sin. \beta} = \frac{\frac{\sin. \alpha}{\cos. \beta} . \sin. \beta - \sin. \beta}{\cos. \beta + \frac{\sin. \alpha}{\cos. \beta} . \sin. \beta}$$

$$= \frac{\text{tg. } \alpha . \text{cosin. } \beta - \sin. \beta}{\cos. \beta + \text{tg. } \alpha . \sin. \beta} = \frac{\text{tg. } \alpha - \frac{\sin. \beta}{\cos. \beta}}{1 + \text{tg. } \alpha . \frac{\sin. \beta}{\cos. \beta}} = \frac{\text{tg. } \alpha - \text{tg. } \beta}{1 + \text{tg. } \alpha . \text{tg. } \beta}$$

$$\text{XXV. cot. } (\alpha - \beta) = \frac{\cos. (\alpha - \beta)}{\sin. (\alpha - \beta)}$$

$$\frac{\cos. \alpha . \cos. \beta + \sin. \alpha . \sin. \beta}{\sin. \alpha . \cos. \beta - \cos. \alpha . \sin. \beta} = \frac{\frac{\cos. \alpha}{\sin. \alpha} . \cos. \beta + \sin. \beta}{\cos. \beta - \frac{\cos. \alpha}{\sin. \alpha} . \sin.}$$

$$= \frac{\text{cot. } \alpha . \cos. \beta + \sin. \beta}{\cos. \beta - \text{cot. } \alpha . \sin. \beta} = \frac{\text{cot. } \alpha + \frac{\sin. \beta}{\cos. \beta}}{1 - \text{cot. } \alpha . \frac{\sin. \beta}{\cos. \beta}} = \frac{\text{cot. } \alpha + \text{tg. } \beta}{1 - \text{cot. } \alpha . \text{tg. } \beta}$$

Zu §. 30.

S. Fig. II.

$$\text{Th. } BCD = R$$

$$\text{Dat. } AB = AC = AD$$

$$BAC = 2\,ACD$$

$$DAC = 2\,ACB$$

$$BAC + DAC = 2(ACD + ACB)$$

$$BAC + DAC = 2R$$

$$2(ACD + ACB) = 2R$$

$$\text{Ergo } ACD + ACB = R$$

Zu §. 31.

$$\text{Th. } BC + AC : BC - AC = tg.\,\tfrac{1}{2}(CAB + CBA)$$
$$: tg.\,\tfrac{1}{2}(CAB - CBA).$$

$$\text{Dat. } AC = CN = CM$$

$$NO \ddagger AM$$

$$\triangle BMA \backsim \triangle BNO$$

$$\text{weil } B = B$$

$$BAO = BMA, \text{ da } NO \ddagger AM$$

$$BM : BN = AM : ON$$

Da $AMN = R$, so ist $AM = tg.\,y$ für den Radius AN.

Es ist ferner $AMN = ANO$, weil $NO \ddagger AM$, folglich $ANO = R$, daher $ON = tg.\,u$ für den Radius AN.

Daraus folgt

$$BM : BN = tg.\,y : tg.\,u$$

$$BM = BC + CM = BC + AC$$

$$BN = BC - CN = BC - AC$$

$$x + y + r = 2R$$
$$CAB + CBA + r = 2R$$
$$x + y + r = CAB + CBA + r$$
$$x + y = CAB + CAB$$
$$x = y, \text{ weil } AC = CN$$
$$2y = CAB + CBA$$
$$y = \tfrac{1}{2}(CAB + CBA)$$

$u = y - CBA = \tfrac{1}{2}(CAB + CBA) - CBA = \tfrac{1}{2}(CAB - CBA)$.

Nimmt man nun die erforderlichen Substitutionen vor, so findet man aus $BM : BN = tg.y : tg.u$
$BC + AC : BC - AC = tg.\tfrac{1}{2}(CAB + CBA) : tg.\tfrac{1}{2}(CAB - CBA)$.

* * *

Anmerkung.

Man kann den §. 31. aufgestellten Lehrsatz bei dessen Beweis man auf die Erläuterungen verwiesen wurde, auch allgemeiner machen, wo er dann so heißt: Wenn man in einem Dreieck eine Seite verlängert, so daß die Verlängerung der anstoßenden Seite gleich wird und man von dem Endpunkt dieser Verlängerung bis nach dem einen Endpunkt der dritten Seite eine gerade Linie zieht, so bildet diese mit der genannten Seite einen rechten Winkel, wenn man von zwei gleichen Seiten, die eine verlängerte; einen stumpfen, wenn von zwei ungleichen Seiten die größere und einen spitzen, wenn die kleinere verlängert ward.

Von den drei Fällen haben wir den ersten bewiesen, es bleiben also blos noch die beiden andern übrig.

Fig. III. Th. $y+z>R$

$$\text{Dat. } BC>AB$$
$$AB=DB$$
$$x=2y$$
$$o=z+t$$
$$x+o=2y+z+t$$
$$\frac{x+o}{2}=y+\tfrac{1}{2}z+\tfrac{1}{2}t$$
$$z>t, \text{ weil } BC>AB$$
$$\tfrac{1}{2}z>\tfrac{1}{2}t$$
$$y+\tfrac{1}{2}z+\tfrac{1}{2}z>\frac{x+o}{2}$$
$$y+z>\frac{x+o}{2}$$
$$\frac{x+o}{2}=R$$
$$\text{Ergo } y+z>R$$

Fig. IV. Th. $m+n<2R$

$$\text{Dat. } FE>EG$$
$$FE=HE$$
$$s=2m$$
$$l=n+r$$
$$s+l=2m+n+r$$
$$\frac{s+l}{2}=m+\tfrac{1}{2}n+\tfrac{1}{2}r$$

$$n > r, \text{ weil } FE > EG$$
$$\frac{1}{2}n < \frac{1}{2}r$$
$$m + \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n < \frac{s+1}{2}$$
$$\frac{s+1}{2} = R$$
$$\text{Ergo } m + n < R$$

In der neuesten (vierten) Auflage meines Lehrbuchs ist dieser Lehrsatz mit seinen Beweisen aufgestellt; ich habe ihn hier für diejenigen vorgetragen, welche im Besitz der ältern Auflage sind, weil wir von ihm in der Lehre von der Ellipse Gebrauch machen werden.

Zu §. 32.

Nach Lehrbuch Trigonometrie §. 10. ist

$$M : N = \sin.\alpha : \sin.\beta$$
$$M + N : M - N = \sin.\alpha + \sin. : \sin.\alpha - \sin.\beta$$

§. 29. XI. fanden wir $\frac{\sin.\alpha + \sin.\beta}{\sin.\alpha - \sin.\beta} = \frac{tg.\frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{tg.\frac{1}{2}(\alpha - \beta)}$

Dies giebt $\sin.\alpha + \sin.\beta : \sin.\alpha - \sin.\beta = tg.\frac{1}{2}(\alpha + \beta) : tg.\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$

also $M + N : M - N = tg.\frac{1}{2}(\alpha + \beta) : tg.\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$.

Zu §. 40.

Eine Größe durch eine andere dividiren heißt: aus der ersten eine Größe ableiten, wie 1 aus der andern

Größe entspringt; $\frac{a}{b}$ für gerade Linien gebraucht, heißt aus der geraden Linie a eine andere ableiten, wie 1 aus der geraden Linie b erzeugt wird; da mir aber 1 nicht gegeben ist, so erkenne ich auch nicht, wie 1 aus b entspringt, also kann ich auch $\frac{a}{b}$ nicht darstellen.

Zu §. 41.

$\frac{ab}{c}$ ist die vierte Proportionallinie zu c, a und b.

Zu §. 43.

Fig. V. sey BD = b, AB = a und ACB = ACD = R so ist BAD = R, und also △ BAD ∼ △ ABC; folglich BD : AB = AB : BC, d. h. b : a = a : BC, also $BC = \frac{a^2}{b}$.

Zu §. 44.

Construction von $\sqrt{ab}$.

Fig. V. sey BD = b, welches > a, man beschreibe über BD den Halbkreis, mache BC = a, BCA = R, und ziehe AB; so ist $AB = \sqrt{ab}$. Um den Beweis zu führen, ziehe man AD, so ist △ ABD ∽ △ ABC und BD : AB = AB : BC d. h. b : AB = AB : a, folglich $AB^2 = ab$ und $AB = \sqrt{ab}$.

Zu §. 54.

Auflösung der Aufgaben.

1. Man errichte auf b in dem einen Punkt derselben a senkrecht, bilde das rechtwinkligte Dreieck, so ist die Hypothenuse $=\sqrt{(a^2+b^2)}$.

2. Man errichte auf dem einen Endpunkte von b eine senkrechte Linie und beschreibe aus dem andern mit a einen Kreis, der von der senkrechten Linie ein Stück abschneidet, welches $=\sqrt{(a^2-b^2)}$ ist; denn wenn man von dem Endpunkte der senkrechten Linie eine gerade Linie nach dem zweiten Endpunkt von b zieht, so ist diese Radius des beschriebenen Kreises, also $=a$, und zugleich Hypothenuse des rechtwinklichten Dreiecks, in welchem das abgeschnittene Stück der senkrechten Linie, was wir x nennen wollen, die eine und b die andere Kathete ist; es ist also $x^2=a^2-b^2$ oder $x=\sqrt{(a^2-b^2)}$.

Beantwortung der Frage:

Wäre $a<b$, so würde, wenn man nach der vorhin gegebenen Auflösung mit a den gedachten Kreis beschreiben wollte, dieser die errichtete senkrechte Linie nicht schneiden.

Erläuterung der übrigen Auflösungen und die dazu gehörigen Beweise.

A. Fig. V. sey $BD=a$, man beschreibe über derselben einen Halbkreis, ziehe $BA=b$, und sodann AC, so ist $AC=\sqrt{(a^2-b^2)}$.

Beweis. $BAD = R$, also $AC^2 = a^2 - b^2$, folglich $AC = \sqrt{(a^2 - b^2)}$. Ist $b > a$, so kann b nicht Sehne in dem Halbkreise seyn, folglich ist unter diesen Umständen $\sqrt{(a^2 - b^2)}$ eine unmögliche Größe.

B. Fig. V. sey $BD = a + b$; man beschreibe über BD einen Halbkreis, schneide von BD ein Stück DC $= 2b$ ab, errichte in C die senkrechte AC und ziehe AB, so ist $AB = \sqrt{(a^2 - b^2)}$.

Beweis. Zieht man AD, so ist $BAD = R$, also $\triangle BAC \backsim \triangle BAD$; daher $BC : AB = AB : BD$.

Nun war $BD = a + b$, $DC = 2b$, folglich $BC = BD - DC = a + b - 2b = a - b$; daher $a - b : AB = AB : a + b$; also $AB^2 = (a + b) . (a - b) = a^2 - b^2$ und folglich $AB = \sqrt{(a^2 - b^2)}$.

Setzt man $b > a$, so ist $2b > a + b$, man kann also 2b alsdann nicht von $a + b$ abschneiden, und man sieht, daß unter diesen Umständen $\sqrt{(a^2 - b^2)}$ unmöglich ist.

C. Fig. V. sey $BE = ED = a$, $EC = b$, man errichte AC senkrecht auf BD, so ist $AC = \sqrt{(a^2 - b^2)}$

Beweis. $AC^2 = BC \times CD$. Es ist aber $BC = BE - EC = a - b$, und $CD = ED + EC = a + b$; folglich $AC^2 = (a - b) . (a + b) = a^2 - b^2$; folglich $AC = \sqrt{(a^2 - b^2)}$.

Ist $b > a$, so kann man von a nicht b abschneiden, und also $\sqrt{(a^2 - b^2)}$ nicht konstruiren.

Auflösung der Aufgabe 4.

Man beschreibe ein rechtwinkligtes Dreieck, dessen eine Kathete a, die andere b ist, so ist die Hypothenu-

se $= \sqrt{(a^2+b^2)}$. Man mache ferner den einen Schenkel eines rechten Winkels $= c$, und beschreibe von dem Endpunkte desselben, mit $\sqrt{(a^2+b^2)}$ einen Kreis, so wird von dem andern Schenkel ein Stück abgeschnitten, welches $= \sqrt{(a^2+b^2-c^2)}$.

Zu §. 47.

Fig. 20. muß EC und GC sich schneiden, weil $CEH = R$, und also $CEG > R$, folglich $EGC + CEG < 2R$.

Der Kreis geht auch durch F, weil $CD = CF$, was sich daraus ergiebt, daß $\triangle DGC \cong \triangle CGF$, da $GC = GC$, $DG = GF$ und $DGC = FGC = R$.

Um zu beweisen daß $EH = EI$, ziehe man CH und CI so ist $\triangle CEH = \triangle CEI$, denn $CE = CE$, $CH = CI = r$, und $CEH = CEI = R$, folglich $EH = EI$.

Es ist nun $DE : EH = EI : EF$ und da $EH = EI$, $DE : EH = EH : EF$ d. h. $a : EH = EH : b$; also $EH^2 = ab$, oder $EH = \sqrt{ab}$; folglich auch $EI = \sqrt{ab}$.

Zu §. 48.

Auflösung der Aufgaben.

1. Ist a gegeben, so kennt man auch $\frac{1}{2}a$; man mache also ein rechtwinkligtes Dreieck, dessen eine Kathete $= a$, die andere $= \frac{1}{2}a$; so ist das Quadrat der Hypothenuse desselben $a^2 + \frac{1}{4}a^2$, also die Hypothenuse $= \sqrt{a^2 + \frac{1}{4}a^2} = \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$.

2. $\frac{3}{4}a^2 = a^2 - \frac{1}{4}a^2$. Man mache einen rechten Winkel, und den einen Schenkel desselben $= \frac{1}{2}a$; aus dem

Endpunkte dieses Schenkels beschreibe man mit a einen Kreis, dieser schneidet von dem andern Schenkel ein Stück ab, welches $=\sqrt{\frac{3}{4}a^2}$; dann verbinde man die beiden Endpunkte der Schenkel durch eine gerade Linie, so entsteht ein rechtwinkligtes Dreieck, in welchem die Hypothenuse $=a$, und die eine Kathete $=\frac{1}{2}a$ ist; also ist das Quadrat der andern Kathete $=a^2-(\frac{1}{2}a)^2=\frac{3}{4}a^2$; folglich die andere Kathete selbst: $\sqrt{\frac{3}{4}a^2}$.

Zu §. 57.

Vergleiche Fig. 41.

1. $CD:DE=1:\sin.(180^\circ-\varphi)=1:\sin.\varphi$

$z:y=1:\sin.\varphi$, also $y=z.\sin.\varphi$

2. $BE=BC+CE$ d. h. $x=u+CE$.

$CD:CE=1:\cos.(180^\circ-\varphi)$

$z:CE=1:\cos.(180^\circ\varphi)$, also $CE=z.\cos.(180^\circ-\varphi)$

und $x=u+z.\cos.(180^\circ-\varphi)$

3. $DE:CD=1:\text{cosec}.(180^\circ-\varphi)=1:\text{cosec}\cdot\varphi$

$y:z=1:\text{cosec}.\varphi$, also $z=y.\text{cosec}.\varphi$

4. $BC=BE-CE$ d. h. $u=x-CE$

$DE:CE=1:\cot.(180^\circ-\varphi)$

$y:CE=1:\cot.(180^\circ-\varphi)$, also $CE=y.\cot.(180^\circ-\varphi)$

und $u=x-y.\cot.(180^\circ-\varphi)$.

Wir hätten die in der Gleichung vorkommenden

Glieder für schiefwinkligte Coordinaten die Formen z^n, u^n, $u^p z^q$ wo $p+q=n$, so erhielte man $y^n . \operatorname{cosec}. \varphi^n$, statt z^n; $(x+y . \cot. \varphi)^n$ statt u^n und endlich $(x+y . \cot. \varphi)^p y^q . \operatorname{cosec}. \varphi^q$, wo $p+q=n$.

Zu §. 59.

Anmerkung.

Fig. VII. sey AI die Abscissenlinie, G der Anfangspunkt der Abscissen, AGB der Coordinatenwinkel, man mache $BG=c$ und $AG=-\frac{ac}{b}$, so fällt ein Punkt der Linie, für welche die Gleichung gegeben ist, in A, denn wenn $AG=-\frac{ac}{b}$, so ist $y=0$, d. h. die durch die Gleichung bestimmte Linie schneidet die Abscissenlinie. Zieht man nun durch A und G eine gerade Linie, so ist diese die verlangte Linie.

Um dies darzuthun, ziehe man von irgend einem Punkte in AI z. B. von H, die Linie CH ∦ BG und von B aus BF ∦ AI, so ist $BG=EH=c$; ferner $BE=GH=x$ und $CH=y$, daher ist $\triangle ABG \sim \triangle BEC$, also $AG:BG=BE:CE$ d. h. $\frac{ac}{b}:c=x:CE$ und daher CE

$$=\frac{cx}{\frac{ac}{b}}=\frac{bcx}{ac}=\frac{bx}{a}.$$

Da nun $y=CH=CE+EH$, so ist $y=\frac{bx}{a}+c$.

Man hätte auch den Werth für y gleich so bestimmen können; weil BG ∦ CH, so ist $AG:BG=AH$

:CH

: CH oder $\frac{ac}{b} : c = \frac{ac}{b} + x : y$, folglich $y = \frac{\frac{ac^2}{b} + cx}{\frac{ac}{b}}$

$= \frac{ac^2 + bcx}{ac} = c + \frac{bx}{a}$.

Zu §. 65.

Man kann den im §. vorgetragenen Satz auch auf folgende Art beweisen:

$$y + \Delta y = \frac{b(x + \Delta x)}{a} + c = \frac{bx + b\Delta x}{a} + c$$

$$y \qquad = \frac{bx}{a} + c$$

$$\overline{\Delta y = \frac{b\Delta x}{a}}$$

Zu §. 67.

Fig. VIII. ist $BDC < BCA$, weil BDC ein innerer und BCA ein äußerer gegenüberstehender Winkel vom $\triangle BDC$.

Zu §. 68.

Ist Fig. IX. $r > t$; so ist, da $t + u = 2R$, $r + n > 2R$ und also können sich A und B nicht über EF schneiden.

Ist Fig. X. $t = r$, so ist $A \ddagger B$.

Zu §. 74.

Die Axe liegt in dem Dreieck, welches entsteht, wenn man durch die Spitze und dem Mittelpunkt der Grundfläche eine Ebene legt, denn die Axe ist die gerade Linie, welche diese beiden Punkte verbindet; wenn aber zwei Punkte einer geraden Linie in einer Ebene liegen, so liegt die ganze Linie in ihr.

Zu §. 75.

Fig. 30. 31 und 32. sei ABC das Axendreieck und der Schnitt gehe durch die Seite AC im Punkte D. Ist nun Fig. 30. DF die Durchschnittslinie ‡ AB so ist die auf der Oberfläche des Kegels entstandene krumme Linie DI und DN die Parabel; in diesem Falle ist der äußere Winkel $CDF = BAC$, dem Winkel an der Spitze des Axendreiecks.

Ist hingegen Fig. 31. DE die Durchschnittslinie, so entsteht die Ellipse, wenn $EDC > BAC$; daß in diesem Fall DE und AB sich schneiden müssen, ergiebt sich auf folgende Art: $EDC + EDA = 2R$, $EDC > BAC$, also $BAC + EDA < 2R$.

Ist endlich Fig. 32. DG die Durchschnittslinie und $CDG < BAC$, so entsteht die Hyperbel DH und DK. Da $CDG + GDA = 2R$ und $CDG < BAC$, so ist $BAC + GDA > 2R$, folglich können AB und DG im Dreieck ABC nicht zusammenstoßen; verlängert man aber AB nach P und AC nach M, so daß ein entgegengesetztes Axendreieck gebildet wird, so wird DG

nach dieser Seite verlängert AB in seiner Verlängerung AP in L schneiden; denn wenn BAC + GDA > 2R, so sind LAD + LDA < 2R.

Zu §. 76.

Der Kreis gehört zu den Ellipsen; denn Fig. 33. ist DR ‡ BC, ARD also ein Dreieck, folglich RDC > BAC.

Zu §. 77.

Die Ellipse hat zwei Arme, welche auf den beiden einander entgegengesetzten Seiten der Durchschnitts- (Abscissen-) linie liegen.

Sie schneiden die Abscissenlinie in 2 Punkten D und E, in welchen sie selbst auch zusammenstoßen. (Sie hat zwei Scheitelpunkte.)

Die Ellipse bildet also eine ebene Figur und ihre Arme entfernen sich erst von einander, und nähern sich alsdann einander wieder.

Die Ellipse geht nicht in den entgegengesetzten Kegel über; denn DE kann AB nur in einem Punkt (E) schneiden.

Die Hyperbel hat vier Arme, wovon zwei in dem ersten und zwei in dem andern entgegengesetzten Kegel auf beiden Seiten der Abscissenlinie liegen.

Sie hat zwei Scheitelpunkte, in jedem der gedachten Kegel einen.

In jedem Kegel entfernen sich die beiden Arme

immer weiter von einander, je weiter man sie fortführt: also bilden die Arme der Hyperbel keine Flächenfigur.

Zu §. 80.

Beantwortung der Fragen:

1. Man sucht zu AH und HD die dritte Proportionallinie, denn AH : HD = HD : p.

2. $\frac{HD^2}{AD}$ in Worten ausgedrückt sagt: Man solle das Quadrat des Durchmessers des Kreisschnitts im Kegel im Scheitelpunkte der Parabel durch die Entfernung dieses Scheitelpunkts von der Spitze des Kegels dividiren.

Zu §. 82.

Da MOP = R, so ist $OP^2 = MO \times OK$. Betrachtet man OP als zur Parabel gehörig, so ist es y, wenn DO = x; folglich $OP^2 = y^2 = MO \times OK$.

$\triangle DOM \sim \triangle AHD$, weil AB ǂ DF und HD ǂ KM; folglich AH : HD = DO : OM d. h. AH : HD = x : OM und also $OM = \frac{HD}{AH} \cdot x$; da nun OK = HD, so ist $y^2 = \frac{HD^2}{AH} \cdot x$, wo HD und AH beständige Größen sind;

man kann also auch $\frac{HD^2}{AH} = p$ setzen, folglich ist $y^2 = px$.

Zu §. 83.

Wenn $y^2 = px$, so ist $y = \sqrt{px}$, also die mittlere Proportionallinie zwischen p und x.

Zu §. 84.

Zu 7. Die Abscissen einer Parabel verhalten sich wie die Quadrate der dazu gehörigen Ordinaten.

Zu 8. Da $y^2 : z^2 = x : t$, so ist $y : z = \sqrt{x} : \sqrt{t}$, d. h. die Ordinaten einer Parabel verhalten sich wie die Quadratwurzeln aus den dazu gehörigen Abscissen.

Zu §. 86.

Der Brennpunkt der Parabel ist der Endpunkt der Abscisse wo y der halbe Parameter d. h. $= \frac{1}{2}p$ ist. Setzt man nun in die Gleichung $y^2 = px$, $\frac{1}{2}p$ statt y, so ist

$$(\tfrac{1}{2}p)^2 = px \text{ oder } \tfrac{1}{4}p^2 = px, \text{ also } \tfrac{1}{4}p = x;$$

in Worten ausgedrückt: die Abscisse für den Brennpunkt (oder welches einerlei ist: die Entfernung des Brennpunkts vom Scheitelpunkt) der Parabel ist dem vierten Theil des Parameters gleich.

Es heiße die Entfernung des Brennpunkts vom Scheitelpunkt der Parabel f, so ist $f = \frac{1}{4}p$ und also $p = 4f$; folglich $y^2 = px = 4fx$.

Zu §. 87.

Zu II. Fig. 37. Th. $CF = AG + \frac{1}{4}p = x + \frac{1}{4}p$

$$\text{Dat. } AGF = R$$

$$\underline{AC = \frac{1}{4}p}$$

$$CG = AG - AC = AG - \frac{1}{4}p = x - \frac{1}{4}p$$

$$CF = \sqrt{(FG^2 + CG^2)} = \sqrt{[y^2 + (x - \frac{1}{4}p)^2]}$$

$$= \sqrt{[px + (x - \frac{1}{4}p)^2]}$$

$$= \sqrt{(px + x^2 - \frac{1}{2}px + \frac{1}{16}p^2)} = (x^2 + \frac{1}{2}px + \frac{1}{16}p^2)$$

$$= x + \frac{1}{4}p$$

Zu III.

Fig. XI. sey CH der Radius vector, $HI = y$ und das dazu gehörige $x = AI < \frac{1}{4}p$.

$$\text{Th. } CH = x + \frac{1}{4}p$$

$$\text{Dat. } HIC = R$$

$$\underline{AC = \frac{1}{4}p}$$

$$IC = AC - AI = \frac{1}{4}p - x$$

$$CH = \sqrt{(HI^2 + IC^2)} = \sqrt{[y^2 + (\frac{1}{4}p - x)^2]}$$

$$= \sqrt{(px + \frac{1}{16}p^2 - \frac{1}{2}px + x^2)} = \sqrt{(x^2 + \frac{1}{2}px + \frac{1}{16}p^2)}$$

$$= x + \frac{1}{4}p.$$

Zu §. 90.

$$\text{Th. } AF = AG$$

$$\text{Dat. } AH \ddagger LM$$

$$AG \ddagger HI$$

$$\underline{CF = CI = \frac{1}{4}p}$$

$$AG = HI$$

$$\underline{AF = HC + CI = HI}$$

$$\text{Ergo } AF = AG$$

Eben so ist $EF = DC + CI = DI = EK$.

Zu §. 92.

Th. $OF > GO$

Da $\triangle CDO \cong \triangle FDO$, so ist $CO = OF$; es ist aber $CO > GO$, weil $CGO = R$; also ist $OF > GO$.

Zum Zusatz zu §. 92.

Der allgemeinen Auflösung zu Folge, soll man AF bis AB verlängern, so daß $AB = AF$; man soll ferner $EBF = R$ machen, dann von dem gegebenen Berührungspunkt (hier A) mit AB eine Parallele ziehen, dies wäre AB selbst und sodann den Winkel, den diese Parallele mit dem an den Berührungspunkt gezogenen Vector im Berührungspunkt bildet, hier also BAF ($= 2R$) halbiren; dies giebt nun in diesem Fall eine im Scheitelpunkt auf der Axe senkrecht stehende Linie.

Daß diese senkrechte Linie die verlangte Tangente ist, sieht man leicht daraus, daß wenn man in derselben irgend einen andern Punkt annimmt, und von ihm eine gerade Linie zum Brennpunkt zieht, so ist diese die Hypothenuse eines rechtwinkligten Dreiecks, in welchem die eine Kathete $= \frac{1}{4}p$, also ist sie $> \frac{1}{4}p$. Der Vector aber ist für den Scheitelpunkt $= \frac{1}{4}p$, denn für diesen Punkt ist $x = 0$; also liegt jeder andere Punkt in der senkrechten Linie weiter vom Brennpunkt als der Vector, folglich außer der Parabel.

Zu §. 93.

Beweis des ersten Lehrsatzes.

Thes. $TP = 2x$

$\triangle BCF \cong \triangle MPQ$

$CBF = R$

$CB = MP$, weil $CB \ddagger MP$ und $CM \ddagger BP$

$CF = MQ$, weil $CM \ddagger BQ$ und $CF \ddagger MQ$

(Dies letztere ergiebt sich daraus, daß $ODF = R$ und $DMQ = R$.)

$BF = PQ$

$BF = BA + AF = \frac{1}{4}p + \frac{1}{4}p = \frac{1}{2}p$

$PQ = \frac{1}{2}p$

$TP : MP = MP : PQ$

$TP : y = y : \frac{1}{2}p$

$$\text{Ergo } TP = \frac{y^2}{\frac{1}{2}p} = \frac{px}{\frac{1}{2}p} = \frac{2px}{p} = 2x.$$

Beweis des zweiten Lehrsatzes.

Thes. $PQ = \frac{1}{2}p$

$\triangle BCF \cong \triangle MPQ$

$BF = PQ$

$BF = BA + AF = \frac{1}{2}p$

Ergo $PQ = \frac{1}{2}p$

Beweis des dritten Lehrsatzes.

$TM^2 = MP^2 + TP^2 = y^2 + (2x)^2 = px + 4x^2$; also $TM = \sqrt{(px + 4x^2)}$.

Beweis des vierten Lehrsatzes.

$MQ^2 = PQ^2 + MP^2 = (\frac{1}{2}p)^2 + y^2$; also $MQ = \sqrt{[(\frac{1}{2}p)^2 + y^2]}$.

Man kann diese Formel auch so ausdrücken:

$$MQ = \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + px)} = \sqrt{[p(\frac{1}{4}p + x)]}.$$

Zu §. 94.

Auflösung der Aufgabe.

Es sey Fig. 43. AQ die Axe der Parabel und M der Punkt, an welchen eine Tangente gezogen werden soll. Man fälle von M die senkrechte Linie MP auf AQ, verlängere AQ über A hinaus, mache AF = AP und ziehe von T nach M eine gerade Linie, so ist diese die verlangte Tangente.

Beweis.

Es ist AP = x, da nun AT = AP, so ist AT + AP = TP = 2x, d. h. TP ist die Subtangente, also TM die Tangente.

Zu §. 98.

$PQ^2 = y^2 = MP \cdot PN$

Nun ist $\triangle FMP \backsim \triangle FgG$, also

$$FP : MP = FG : gG$$
$$x : MP = a : gG$$
$$MP = \frac{x}{a} . gG$$

Ferner ist $\triangle PNG \backsim \triangle FfG$, folglich

$$PN : PG = Ff : FG$$
$$PN : a - x = Ff : a$$
$$PN = \frac{a-x}{a} . Ff$$

$$y^2 = MP . PN = \frac{x}{a} . gG . \frac{a-x}{a} . Ff = \frac{x}{a} . a - x . \frac{gG . Ff}{a}$$
$$= \frac{ax - x^2}{a} . \frac{gG . Ff}{a} = \left(x - \frac{x^2}{a}\right) . \frac{gG . Ff}{a}.$$

Es sind Gg, Ff und a beständige Größen für denselben Schnitt, daher setze man $\frac{Gg . Ff}{a} = p$; so ist für die Ellipse $y^2 = px - \frac{px^2}{a}$.

Zu §. 99.

1. Die Gleichung für die Ellipse ist $y^2 = px - \frac{px^2}{a}$, wenn die Abscisse ein Diameter, oder wie wir sie hier annehmen wollen, eine Axe ist; also $y = \pm \sqrt{\left(px - \frac{px^2}{a}\right)}$. Fig. 46. gehören zu AF die Ordinaten DF = EF. Es hat also y einen doppelten, gleichen und entgegengesetzten Werth für jedes x, folglich hat die Ellipse zwei Arme (Zweige ramos), welche auf beiden entgegengesetzten Seiten der Axe liegen, und von diesen in der Mitte durchschnitten werden.

2. y wird nur Null, wenn y^2 Null wird. y^2 kann aber wenn p und a wirkliche Größen sind, nur unter zwei Bedingungen Null werden, einmal wenn $x=0$, denn dann ist px sowohl als $\frac{px^2}{a}$ Null; und sodann, wenn $px=\frac{px^2}{a}$; aus dem letztern ergiebt sich, wenn $apx=px^2$ d. h. wenn $a=x$. Es kömmt also die Ellipse zweimal mit der Axe zusammen, im Anfangs- und im Endpunkt (A und B), und dies sind also ihre Scheitelpunkte. Ferner ergiebt sich hieraus, daß die Ellipse eine geschlossene Figur ist.

3. Setzt man x minus, so ist $y^2=p.-x-\frac{p.(-x)^2}{a}=-px-\frac{px^2}{a}$, folglich y^2 eine negative Größe, also y die Quadratwurzel aus einer negativen Größe, d. h. unmöglich. Es geht also die Ellipse nicht über den Anfangspunkt der Axe in entgegengesetzter Richtung hinaus, kann also auch in den entgegengesetzten Kegel nicht übergehen.

4. Es heißen die beiden Abscissen für welche y denselben Werth haben soll x und v, so muß da $y^2=px-\frac{px^2}{a}$ und auch $=pv-\frac{pv^2}{a}$ seyn soll; $px-\frac{px^2}{a}=pv-\frac{pv^2}{a}$ seyn.

Um v nach x zu bestimmen, löse man diese Gleichung auf

$$px - \frac{px^2}{a} = pv - \frac{pv^2}{a} \quad p)$$

$$x - \frac{x^2}{a} = v - \frac{v^2}{a}$$

$$\frac{v^2}{a} - v = \frac{x^2}{a} - x$$

$$v^2 - av = x^2 - ax \quad (a$$

$$v^2 - av + \tfrac{1}{4}a^2 = x^2 - ax + \tfrac{1}{4}a^2$$

Zieht man nun auf beiden Seiten die Quadratwurzel aus, so erhält man auf jeder zwei gleiche entgegengesetzte Werthe; auf der linken Seite $v - \frac{1}{2}a$ und $\frac{1}{2}a - v$, und auf der rechten $x - \frac{1}{2}a$ und $\frac{1}{2}a - x$. Man sieht leicht ein, daß wenn man nach verschiedenen Werthen der Abscisse, für welche ein gleiches y statt finden soll, frägt, man nicht $v - \frac{1}{2}a = x - \frac{1}{2}a$ oder $\frac{1}{2}a - v = \frac{1}{2}a - x$ setzen kann, denn diese Annahme würde $v = x$ geben; man muß also setzen $\frac{1}{2}a - v = x - \frac{1}{2}a$ oder welches einerlei ist $v - \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}a - x$. Entwickelt man $v - \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}a - x$, so erhält man

$$v - \tfrac{1}{2}a = \tfrac{1}{2}a - x$$

$$v = a - x$$

d. h. die Ordinate für eine Abscisse ist der Ordinate für dieselbe Abscisse gleich, wenn sie vom Endpunkt der Axe in entgegengesetzter Richtung genommen wird. DF = GF, wenn AF = fB.

5. Wir haben unter 2 gesehen, daß y Null wird, wenn $x = a$; auch unter 4, daß y einen Werth hat, sobald die Abscisse kleiner als a; wir haben hier also nur zu untersuchen, ob es für die Ellipse noch eine mög-

liche Abscisse giebt, wenn $x > a$, d. h. ob y^2 unter diesen Umständen noch positiv bleibt.

Ist $x > a$, so sey $a + m = x$; dann wäre $y^2 = px - \frac{px^2}{a} = p\left(x - \frac{x^2}{a}\right) = p\left(a + m - \frac{(a+m)^2}{a}\right)$

$$= p\left(a + m - \frac{a + 2am + m^2}{a}\right)$$

$$= p\left(a + m - \left(a + 2m + \frac{m^2}{a}\right)\right) =$$

$p\left(a + m - a - 2m - \frac{m^2}{a}\right) = p\left(-m - \frac{m^2}{a}\right)$.

Unter diesen Umständen wird also y^2 negativ, d. h. y unmöglich.

Die Ellipse hat folglich nur zwei Arme und nur zwei Scheitelpunkte und zwar in einem und demselben Kegel, und erstreckt sich über die Axe nicht hinaus.

6. Da die Ordinaten für gleiche Abscissen vom Anfangs- und Endpunkt genommen gleich groß sind s. 4. und sie unter dieser Bedingung wachsen, je weiter sich der Endpunkt der Abscisse von einem der Scheitelpunkte entfernt, so wird die Ordinate im Mittelpunkt der Axe, also wenn $x = \frac{1}{2}a$, die größte seyn müssen.

Ist $x = \frac{1}{2}a$, so ist $y^2 = \frac{1}{2}ap - \frac{\frac{1}{4}a^2p}{a} = \frac{1}{2}ap - \frac{1}{4}ap$ $= \frac{1}{4}ap$ und also $y = \sqrt{\frac{1}{4}ap} = \sqrt{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{ap} = \frac{1}{2}\sqrt{ap}$.

7. Die zur Abscisse x gehörige Ordinate sey y, die zu v gehörige z; so ist

$$y^2 : z^2 = px - \frac{px^2}{a} : pv - \frac{pv^2}{a} = x - \frac{x^2}{a} : v - \frac{v^2}{a}$$

$$= ax - x^2 : av - v^2 = (a - x)x : (a - v)v.$$

In Worten ausgedrückt: In der Ellipse verhalten sich die Quadrate der Ordinaten wie die Produkte (oder welches einerlei ist wie die Rechtecke) aus den Segmenten der Axe; die bei jeder Ordinate durch die zu ihr gehörige Absciſſe bestimmt werden.

Zu §. 100.

$$y^2 = px - \frac{px^2}{a} = \frac{c^2x}{a} - \frac{\frac{c^2}{a}x^2}{a} = \frac{c^2x}{a} - \frac{c^2x^2}{a}.$$

Zu §. 101.

$$y^2 = px - \frac{px^2}{a} = p(\tfrac{1}{2}a+u) - \frac{p\cdot(\frac{1}{2}a+u)^2}{a} =$$

$$\tfrac{1}{2}ap + pu - \frac{\frac{1}{4}a^2p + apu + pu^2}{a} = \tfrac{1}{2}ap + pu - \tfrac{1}{4}ap$$

$$- pu - \frac{pu^2}{a} = \tfrac{1}{4}ap - \frac{pu^2}{a};$$ folglich $y = \pm\sqrt{\left(\tfrac{1}{4}ap - \frac{pu^2}{a}\right)}$

$$y^2 = \frac{c^2x}{a} - \frac{c^2x^2}{a^2}$$

Setzt man 1., $x = \tfrac{1}{2}a - u$, so ist

$$y^2 = \frac{c^2.(\frac{1}{2}a-u)}{a} - \frac{c^2.(\frac{1}{2}a-u)^2}{a^2} =$$

$$\frac{\frac{1}{2}ac^2 - c^2u}{a} - \frac{\frac{1}{4}a^2c^2 - ac^2u + c^2u^2}{a^2} =$$

$$\tfrac{1}{2}c^2 - \frac{c^2u}{a} - \tfrac{1}{4}c^2 + \frac{c^2u}{a} - \frac{c^2u^2}{a^2} = \tfrac{1}{4}c^2 - \frac{c^2u^2}{a^2}$$

Setzt man 2., $x = \tfrac{1}{2}a + u$, so ist

$$y^2 = \frac{c^2(\frac{1}{2}a+u)}{a} - \frac{c^2(\frac{1}{2}a+u)^2}{a^2} =$$

$$\frac{\frac{1}{2}ac^2+c^2u}{a}-\frac{\frac{1}{4}a^2c^2+ac^2u+c^2u^2}{a^2}=$$

$$\frac{1}{2}c^2+\frac{c^2u}{a}-\frac{1}{4}c^2-\frac{c^2u}{a}-\frac{c^2u^2}{a^2}=\frac{1}{4}c^2-\frac{c^2u^2}{a^2}.$$

Zu §. 103.

Zu I.

$y^2=px-\frac{px^2}{a}$; setzt man $y=\frac{1}{2}p$; so erhält man

$$\frac{1}{4}p^2=px-\frac{px^2}{a}$$

$$p)\quad \frac{1}{4}p=x-\frac{x^2}{a}$$

$$\frac{1}{4}ap=ax-x^2 \quad (a$$

$$x^2-ax=-\frac{1}{4}ap$$

$$x^2-ax+\frac{1}{4}a^2=\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{4}ap=\frac{1}{4}a(a-p)$$

$$x=-\frac{1}{2}a\pm\sqrt{[\tfrac{1}{4}a(a-p)]}=-\frac{1}{2}a\pm\frac{1}{2}\sqrt{[a(a-p)]}$$

$$=\frac{1}{2}(-a\pm\sqrt{[a(a-p)]}).$$

Zu II.

$$y^2=\frac{1}{4}ap-\frac{pu^2}{a}$$

$$\frac{1}{4}p^2=\frac{1}{4}ap-\frac{pu^2}{a}$$

$$p)\quad \frac{1}{4}p=\frac{1}{4}a-\frac{u^2}{a}$$

$$\frac{u^2}{a}=\frac{1}{4}a-\frac{1}{4}p=\frac{1}{4}(a-p)$$

$$u^2=\frac{1}{4}a(a-p) \quad (a$$

$$u=\pm\sqrt{[\tfrac{1}{4}a(a-p)]}=\pm\frac{1}{2}\sqrt{[a(a-p)]}.$$

Zu III.

$$\frac{c^4}{4a^2} = \frac{1}{4}c^2 - \frac{c^2u^2}{a^2}$$

$$c^2)\ \frac{c^2}{4a^2} = \frac{1}{4} - \frac{u^2}{a^2}$$

$$\frac{c^2}{4} = \frac{1}{4}a^2 - u^2\ \ (a^2$$

$$u^2 = \frac{a^2 - c^2}{4}$$

$$u = \pm\frac{1}{2}\sqrt{(a^2 - c^2)} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{[(a+c).(a-c)]}.$$

Beantwortung der Fragen.

1. Im Kreise ist $a = c$, also $u = \pm\frac{1}{2}\sqrt{(a^2 - c^2)} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{(a^2 - a^2)} = 0$; d. h. im Kreise ist der Mittelpunkt der Brennpunkt.

2. Die Entfernung der beiden Brennpunkte oder die doppelte Excentricität ist $= 2.\frac{1}{2}\sqrt{(a^2 - c^2} = \sqrt{(a^2 - c^2)} = \sqrt{[(a+c).(a-c)]}$; und hieraus folgt, daß das Quadrat der doppelten Excentricität gleich ist der Differenz der Quadrate der großen und kleinen Axe.

Zu IV.

$y^2 = \frac{c^2x}{a} - \frac{c^2x^2}{a^2}$; ferner $p = \frac{c^2}{a}$, also $\frac{1}{2}p = \frac{c^2}{2a}$ und wenn $y = \frac{1}{2}p$ gesetzt wird, so ist $y^2 = \frac{c^4}{4a^2}$; also

$$\frac{c^4}{4a^2} = \frac{c^2x}{a} - \frac{c^2x^2}{a^2}$$

$$c^4 = 4ac^2x - 4c^2x^2\ \ (4a^2$$

$$c^2)\ c^2 = 4ax - 4x^2$$

$$4x^2 - 4ax = -c^2$$

4) $$x^2 - ax = \frac{-c^2}{4}$$

$$x^2 - ax + \tfrac{1}{4}a^2 = \frac{a^2 - c^2}{4}$$

$$x - \tfrac{1}{2}a = \tfrac{1}{2}\sqrt{(a^2 - c^2)}$$

$$x = \tfrac{1}{2}(-a \pm \sqrt{(a^2 - b^2)}).$$

Zu §. 104.

Erster Fall.

Thes. $AF + Af = AB = a$

Dat. $AF = fB$

$AF + Ff + fB = AB = a$

$Ff + fB = Ff + AF = Af$

Ergo $AF + Af = AB = a$

Zweiter Fall.

Th. $DF + Df = a$

$DF = \tfrac{1}{2}p = \frac{c^2}{2a}$ s. §. 100.

$$DF^2 = \frac{c^4}{4a^3}$$

$Df^2 = DF^2 + Ff^2$

$Ff = FC + Cf = 2u = 2 . \tfrac{1}{2}\sqrt{(a^2 - c^2)} = \sqrt{(a^2 - c^2)}$

also $Ff^2 = a^2 - c^2$

$Df^2 = a^2 - c^2 + \frac{c^4}{4a^2}$, also $Df = \pm \sqrt{\left(a^2 - c^2 + \frac{c^4}{2a}\right)}$

$= a - \frac{c^2}{2a}$ *) oder $-a + \frac{c^2}{2a}$.

*) Um sich von der Richtigkeit der Quadratwurzel zu überzeugen, braucht man sie nur wieder zu quadriren.

Wird y positiv genommen, so sind DF und Df positiv und folglich DF und Df $= \frac{c^2}{2a} + a - \frac{c^2}{2a} = a$.

Setzt man y negativ, so sind DF und Df negativ, und also DF $= -\frac{c^2}{2a}$, Df aber $= -a + \frac{c^2}{2a}$, denn da $c < a$, so ist $\frac{c^2}{2a} < a$, und wenn also Df negativ seyn soll, so muß für Df der Werth $-a + \frac{c^2}{2a}$ genommen werden.

Dritter Fall.

$$\text{Th. } IF + If = a$$

$$\triangle ICF \cong \triangle ICF$$

$$IF = If$$

$$IF^2 = IC^2 + FC^2 = (\tfrac{1}{2}c)^2 + u^2 = \tfrac{1}{4}c^2 + (\tfrac{1}{2}\sqrt{a^2 - c^2})^2$$
$$= \tfrac{1}{4}c^2 + \tfrac{1}{4}(a^2 - c^2) = \tfrac{1}{4}c^2 + \tfrac{1}{4}a^2 - \tfrac{1}{4}c^4 = \tfrac{1}{4}a^2; \text{ also}$$
$$IF = \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2} = \tfrac{1}{2}a$$

$$\text{Ergo } IF + If = 2IF = 2 \cdot \tfrac{1}{2}a = a.$$

Vierter Fall.

Fig. 47. soll LF + Lf = a seyn. Man fälle LM senkrecht auf AB, so ist

$$LF^2 = LM^2 + MF^2$$

$$LM^2 = y^2 = \frac{c^2}{4} - \frac{c^2u^2}{a^2} \text{ f. §. 101.}$$

$$MF = MC - FC = u - \frac{\sqrt{(a^2 - c^2)}}{2}$$

$$MF^2 = u^2 - u\sqrt{(a^2 - c^2)} + \frac{a^2 - c^2}{4} = u^2 - \sqrt{(a^2 - c^2)} + \frac{a^2}{4} - \frac{}{4}$$

$$LF^2 = LM^2 + MF^2 = \frac{c^2}{4} - \frac{c^2u^2}{a^2} + u^2 - u\sqrt{(a^2-c^2)}$$
$$+ \frac{a^2}{4} - \frac{c^3}{4} = \frac{a^2}{4} - u\sqrt{(a^2-c^2)} + u^2 - \frac{c^2u^2}{a^2}$$
$$= \frac{a^2}{4} - u\sqrt{(a^2-c^2)} + \frac{a^2u^2 - c^2u^2}{a^2}$$
$$= \frac{a^2}{4} - u\sqrt{(a^2-c^2)} + \frac{a^2-c^2}{a^2} \cdot u^2.$$

Folglich

$$LF = \pm \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} - u\sqrt{(a^2-c^2)} + \frac{a^2-c^3}{a^3} \cdot u^2\right)} =$$
$$\pm \tfrac{1}{2}a \mp \frac{u\sqrt{(a^2-c^2)}}{a} \text{ *)}$$

Auf ähnliche Weise muß man Lf bestimmen

$$Lf^2 = LM^2 + Mf^2$$
$$LM^2 = y^2 = \frac{c^2}{4} - \frac{c^2u^2}{a^6}$$
$$Mf = MC + fC = u + \frac{\sqrt{(a^2-c^2)}}{2}$$
$$Mf^2 = u^2 + u\sqrt{(a^2-c^2)} + \frac{a^2-c^2}{a^4} = u^2 + u\sqrt{(a^2-c^2)}$$
$$+ \frac{a^2}{4} - \frac{c^2}{4}$$
$$Lf^2 = LM^2 + Mf^2 = \frac{c^2}{4} - \frac{c^2u^2}{a^2} + u^2 + u\sqrt{(a^2-c^2)}$$
$$+ \frac{a^2}{4} - \frac{c^2}{4} = \frac{a^2}{4} + u\sqrt{(a^2-c^2)} + u^2 - \frac{c^2u^2}{a^2}$$
$$= \frac{a^2}{4} + u\sqrt{(a^2-c^2)} + \frac{a^2u^2 - c^2u^2}{a^2} = \frac{a^2}{4}$$
$$+ u\sqrt{(a^2-c^2)} + (a^2-c^2)\frac{u^2}{a^2}$$

---

*) Auch hier erhebe man zu mehrerer Verständlichkeit $\frac{1}{2}a \mp \frac{u\sqrt{(a^2-c^2)}}{a}$ zum Quadrat.

Daher

$$Lf = \pm \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} + u\sqrt{(a^2 - c^2)} + (a^2 - c^2)\frac{u^2}{a^2}\right)}$$

$$= \pm \tfrac{1}{2} a \pm \frac{u\sqrt{(a^2 - c^2)}}{a}.$$

Hieraus ergiebt sich

$$LF + Lf = \left(\pm \tfrac{1}{2} a \mp \frac{u\sqrt{(a^2 - c^2)}}{a}\right) \pm \left(\pm \tfrac{1}{2} a \mp \frac{u\sqrt{(a^2 - u^2)}}{a}\right)$$

$$= \pm a.$$

Der doppelte Werth von a erscheint, weil die Vectores entweder über oder unter der Axe liegen können.

Fünfter Fall.

Fig. 48. soll $NF + Nf = a$ seyn.

$$NF^2 = NO^2 + OF^2$$

$$NO^2 = y^2 = \frac{c^2}{4} - \frac{c^2 u^2}{a^2}$$

$$OF = CF - CO = \frac{\sqrt{(a^2 - c^2)}}{2} - u$$

$$OF^2 = \frac{a^2 - c^2}{4} - u\sqrt{(a^2 - c^2)} + u^2 = \frac{a^2}{4} - \frac{c^2}{4}$$
$$- u\sqrt{(a^2 - c^2)} + u^2$$

$$NF^2 = NO^2 + OF^2 = \frac{c^2}{4} - \frac{c^2 u^2}{a^2} + \frac{a^2}{4} - \frac{c^2}{4}$$
$$- u\sqrt{(a^2 - c^2)} + u^2 = \frac{a^2}{4} - u\sqrt{(a^2 - c^2)} + u -$$
$$\frac{c^2 u^2}{a^2} = \frac{a^2}{4} - u\sqrt{(a^2 - c^2)} + (a^2 - c^2)\frac{u^2}{a^2}$$

Folglich $NF = \pm \tfrac{1}{2} a \mp \frac{u\sqrt{(a^2 - c^2)}}{a}$

Ferner ist

$$Nf^2 = NO^2 + Of^2$$

$$NO^2 = y^2 = \frac{c^2}{4} - \frac{c^2 u^2}{a^2}$$

$$Of = OC + Cf = u + \frac{\sqrt{(a^2 - c^2)}}{2}$$

$$Of^2 = u^2 + u\sqrt{(a^2 - c^2)} + \frac{a^2 - c^2}{4} = u^2 + u\sqrt{(a^2 - c^2)} + \frac{a^2}{4} - \frac{c^2}{4}$$

$$Nf^2 = \frac{c^2}{4} - \frac{c^2 u^2}{a^2} + u^2 + u\sqrt{(a^2 - c^2)} + \frac{a^2}{4} - \frac{c^2}{4} = \frac{a^2}{4} + u\sqrt{(a^2 - c^2)} + (a^2 - c^2)\frac{u^2}{a^2}$$

$$Nf = \pm \tfrac{1}{2} a \pm \frac{u\sqrt{(a^2 - c^2)}}{a}$$

$$NF + Nf = \left(\pm \tfrac{1}{2} a \mp \frac{u\sqrt{(a^2 - c^2)}}{a}\right) + \left(\pm \tfrac{1}{2} a \mp \frac{u\sqrt{(a^2 - c^2)}}{a}\right) = \pm a.$$

Die Bemerkung über $\pm$ a beim vierten Fall gehört auch hierher.

Beantwortung der im §. gegebenen Fragen.

Da im Kreise beide Brennpunkte sich im Mittelpunkt vereinigen, so fallen die beiden Radii vectores in in einander, und bilden nur einen, welcher $= \frac{1}{2}$ a; es sind also im Kreise alle Vektores einander gleich.

Zu §. 107.

Fig. 50. sey AB die Axe der Ellipse, F und f die Brennpunkte derselben, M der gegebene Punkt, an welchem man die Tangente ziehen soll; man ziehe MF und Mf und verlängere letztere über M hinaus bis MF = Mf;

ziehe EF, halbire sie in L und ziehe LM, so ist dies die verlangte Tangente.

Um zu beweisen, daß irgend ein anderer Punkt in dieser Linie, z. B. G, nicht im Umkreis der Ellipse liegen kann, ziehe man GF, Gf und GE.

Da △ EML ≌ △ MLF, so ist GLE = GLF.

Ferner ist △ GLE ≌ △ GLF, denn EL = LF, GL = GL und GLE = GLF, folglich GE = GF.

Es ist aber GE + Gf > Ef; also auch GF + Gf = EF, Ef = EM + Mf = MF + Mf; folglich GF + Gf > MF + Mf.

Zur Anmerkung von §. 107.

Da EM = MF, so ist EL = LF, wenn EML = LMF und umgekehrt: wenn EML = LMF, so ist EL = LF. — Daß, wenn man MF statt Mf verlängert, wo man nun den Winkel NMf erhalten würde, das verlängerte LM (MG) auch NMf halbirt, also in beiden Fällen einerlei Tangente erhalten wird, fällt in die Augen.

Ganz auf dieselbe Weise läßt sich dies darthun, wenn ein anderer Punkt als M zwischen D und M, also näher an D als M angenommen wird.

Zu §. 108.

Th. DMF = GMf

EMD = DMF

EMD = GMf

Ergo DMF = GMf.

Zu §. 109.

Zieht man an den Endpunkten der kleinen Axe Tangenten, so laufen diese mit der großen Axe parallel. Fig. XII. sey AB die große, DE die kleine Axe, F und f die Brennpunkte; man ziehe DF und Df, so ist DF = Df, man verlängere DF nach G, so daß DG = DF = Df, halbire Gf in K und ziehe DK, so ist dies die Tangente für den Punkt D.

Nach §. 30. ist GfF = R, also DKG = R, HI ‡ AB.

Ist der in der Ellipse für die Tangente gegebene Punkt nicht einer der Endpunkte der kleinen Axe, sondern liegt er zwischen einem Scheitelpunkt und einem dieser Endpunkte, wie M Fig. 51. so bilden die Vectoren und die doppelte Excentricität ein Dreieck MFf, in welchem die beiden Vectores (MF und Mf) ungleich sind.

Verlängert man nun den größern Mf so weit, bis ME = MF, so ist nach §. 30. Erläuterungen EFB > R, also EFD < R, da nun DLF = R, so ist DLF + EFD < 2 R, folglich müssen sich DB und HD nach der Seite von MF d. h. nach der Seite von A schneiden.

Berührt also eine gerade Linie die Ellipse in einem Punkte zwischen einem Scheitelpunkt und einem Endpunkt der kleinen Axe, so schneidet sie die große Axe auf der Seite des Scheitelpunktes der dem Berührungspunkt am nächsten liegt.

Daß die Tangente für einen der Scheitelpunkte der

kleinen Axe auf dieser senkrecht steht und daher mit der großen Axe ‡ läuft, folglich unendlich ist, haben wir im Vorhergehenden dargethan; jetzt müssen wir dies auch für die Scheitelpunkte der großen Axe darthun.

Ist Fig. XII. die Tangente für A zu ziehen, so soll man nach der allgemeinen Regel von F und f nach A gerade Linien ziehen (diese fallen hier auf einander) eine derselben über A hinaus verlängern, bis sie der andern gleich ist, dies würde also in der Richtung AL geschehen; den hierdurch entstandenen Winkel (in dem vorliegenden Fall LAF (=2R) halbiren, und die Halbirungslinie AM, die also hier in A auf AB senkrecht steht, ist die verlangte Tangente.

Daß sie Tangente ist, wird dadurch dargethan, daß die geraden Linien MF und Mf, welche man von irgend einem andern Punkt von AM nach den Brennpunkten F und f zieht, größer als die Vectoren AF und Af für den Punkt A sind; dies ergiebt sich aber leicht, denn $MF > AF$ und $Mf = Af$, weil $MAf = R$; also $MF + Mf > AF + Af$.

Zu §. 110.

$$\text{subtang.} = \frac{y^2}{\text{subnorm.}} = \frac{\frac{1}{4}c^2 \quad \frac{c^2u^2}{a^2}}{\frac{c^2u}{a^2}} = \frac{\frac{1}{4}z^2c^2 - c^2u^2}{c^2u}$$

$$\frac{\frac{1}{4}a^2 - u^2}{u} = \frac{a^2 - 4u^2}{4u}.$$

Zu §. 112.

$$\text{subnorm.} = \frac{c^2u}{a^2} = \frac{a^2u}{a^2} = u$$

$$\text{subtang.} = \frac{a^2-4u^2}{4u}$$

$$\text{tang.} = \frac{y}{2au} . \sqrt{[a^4-4u^2(a^2-c^2)]} = \frac{y}{2au} . \sqrt{a^4}$$

$$= \frac{y}{2au} . a^2 = \frac{a^2y}{2au} = \frac{ay}{2u}$$

$$\text{norm.} = \frac{c}{2a^2} \sqrt{[a^4-4u^2(a^2-c^2)]} = \frac{a}{2a^2} . \sqrt{a^4} =$$

$$\frac{a}{2a^2} . a^2 = \frac{a^3}{2a^2} = \tfrac{1}{2}a.$$

Man kann diesen Formeln eine andere Gestalt geben, wenn man $\frac{1}{2}a = r$ (Radius) also $a = 2r$; $u = \frac{1}{2}a - x = r - x$ und $y^2 = (a-x)x = (2r-x)x$, also $y = \sqrt{[(2r-x)]x}$ setzt.

Dann ist

$$\text{subnorm.} = u = r - x.$$

$$\text{subtang.} = \frac{a^2-4u^2}{4u} = \frac{4r^2-4u^2}{4u} = \frac{r^2-u^2}{u}$$

oder wenn man x statt u in der Formel haben will

$$= \frac{r^2-(r-x)^2}{r-x} = \frac{r^2-r^2+2rx-x^2}{r-x} = \frac{2rx-x^2}{r-x} = \frac{(2r-x)x}{r-x.}$$

$$\text{tang.} = \frac{ay}{2u} = \frac{2r\sqrt{(2r-x)x)}}{2(r-x)} = \frac{r\sqrt{((2r-x)x)}}{r-x.}$$

$$\text{norm.} = \tfrac{1}{2}a = \frac{2r}{2} = r.$$

Zu §. 113.

Th. $FMN = fMN$ (Fig. 51.)

Dat. $DMN = HMN = R$

$$\frac{DMN = HMN \qquad DMF = HMf \text{ nach §. 108.}}{\dfrac{DMN - DMF = HMN - HMf}{\text{Ergo } FMN = fMN}}$$

Zu §. 114.

1. $CP : CA = CA : CD$

$CP = u$, $CA = \frac{1}{2}a$, $CD = CP + PD = u + \text{subtg.}$

$$u : \tfrac{1}{2}a = \tfrac{1}{2}a : u + \text{subtg.}$$

Die Proportion in Worten ausgedrückt heißt: die Abscisse vom Mittelpunkt verhält sich zur halben großen Axe, wie diese sich zur Summe der Abscisse und der dazu gehörigen Subtangente; oder die halbe große Axe ist die mittlere Proportionallinie zwischen der Abscisse aus dem Mittelpunkt und der Summe dieser Abscisse und der dazu gehörigen Subtangente.

Aus 1. ergiebt sich:

$$CP : CA - CP = CA : CD - CA$$

2. $CP : PA = CA : AD.$

In Worten ausgedrückt: die Abscisse vom Mittelpunkt verhält sich zur Abscisse vom Scheitelpunkt, wie die halbe große Axe zu dem Theil der Subtangente der außerhalb der Ellipse liegt.

Aus 2. folgt:

$$CP : PA = CP + CA : PA + AD$$

Es ist aber $CP + CA = CP + CB = BP$ und $PA + AD = PD$ daher

3. $CP : PA = BP : PD$

In Worten ausgedrückt: die Absciße aus dem Mittelpunkt verhält sich zur Abciße vom Scheitelpunkt wie die Absciße vom zweiten Scheitelpunkt an genommen, zur Subtangente.

4. Die vierte Proportion ergiebt sich aus der zweiten und dritten; sie sagt, die halbe große Axe verhält sich zu dem Theil der Subtangente welcher außer der Ellipse liegt, wie die Absciße vom zweiten Scheitelpunkt zur Subtangente.

Zu 5. Wir fanden §. 113, daß MN den Winkel FMf halbirt; hieraus ergiebt sich nach Lehrbuch §. 151.

$$FN : fN = MF : mf$$

in Worten: die beiden Theile, in welche die doppelte Excentricität einer Ellipse durch die Normale getheilt wird, verhalten sich wie die Vectoren.

Zu 6. Aus 5 folgt

$$FN : FN + fN = MF : MF + mf$$

$$FN : Ff = MF : a \text{ (oder AB)}$$

In Worten: Einer der Theile, welche durch die Normale in der doppelten Excentricität gebildet werden, verhält sich zu dieser doppelten Excentricität, wie der an dem genommenen Theil angrenzende Radius vector zur großen Axe.

Zu §. 119.

Es sey Fig. 54. A die Spitze eines schiefen Kegels, der Kreis BICN die Grundfläche desselben, deren Mittelpunkt L; der Kegel werde durch eine Ebene IDNI geschnitten, welche in der Grundfläche die Durchschnittslinie IN bildet. Man fälle LF senkrecht auf IN und verlängere sie zum Durchmesser BC; dann lege man durch A und BC eine Ebene, so entsteht △ABC in welchem die Axe des Kegels sich findet. Wenn man diese Axe in den entgegengesetzten Kegel hinein verlängert, so bildet sie dort gleichfalls ein Axendreieck. Die Ebene IDNI schneidet das Axendreieck in DF, ist nun FDC<BAC, so ist IDN eine Hyperbel, und die verlängerte DF geht in N in den andern Kegel über, welches auch von der schneidenden Ebene gilt, durch welche die Hyperbel gebildet wird. Man ziehe HD und QN ‡BC, so sind HD und QN für einen und denselben Hyperbelschnitt beständige, endliche Größen, und eben so DN.

Man schneide den Kegel zwischen D und N durch eine Ebene mit der Grundfläche des Kegels ‡, so ist der Durchschnitt ein Kreis, dessen Durchmesser KM‡BC; dieser Kreis schneidet die Hyperbelebene in einer geraden Linie, deren Hälfte OP.

In den beiden Winkeln MOP und CFN ist MO ‡CF und OP‡FN, also MOP=CFN=R.

Es ist aber OP als Ordinate der Hyperbel (y) für die Abscisse DO=x zu betrachten.

Die Halbkreise ist $OP^2 = y^2 = MO \times OK$.

$\triangle DOP \backsim \triangle DQN$, also $DQ : OM = DN : QN$ d. h. wenn man $DN = a$ setzt, $x : DO = a : QN$, folglich $DO = \frac{x}{a} . QN$.

$\triangle NKO \backsim \triangle NHD$, also $KO : ON - HD : DN$ d. h. $KO : a + x = HD : a$, daher $KO = \frac{a+x}{a} . HD$; und wenn man diese Werthe in die Formel $y^2 = MO \times OK$ setzt, so erhält man $y^2 = \frac{x}{a} . \frac{a+x}{a} . QN . HD$ $= \frac{x}{a} . (a+x) . \frac{QN . HD}{a} = \left(x + \frac{x^2}{a}\right) . \frac{QN . HD}{a}$ woraus nun, wenn man $\frac{QN . HD}{a} = p$ setzt, sich ergiebt:

$$y^2 = p\left(x + \frac{x^2}{a}\right) = px + \frac{px^2}{a}.$$

Zu §. 120.

1. Aus der Formel $y^2 = px + \frac{px^2}{a}$ ergiebt sich $y = \pm \sqrt{\left(px + \frac{px^2}{a}\right)}$; also hat y für ein und dasselbe x einen doppelten gleichen entgegengesetzten Werth; die Arme der Ellipse liegen also in gleichen Entfernungen auf beiden Seiten der Hauptaxe.

2. y wird erstlich Null, wenn $x = 0$, denn alsdann ist $px + \frac{px^2}{a} = 0$; so lange hingegen x positiv bleibt, wächst mit x der Werth von $px + \frac{px^2}{a}$ also

auch y, und y kann auf diese Weise nicht wieder Null werden.

3. Wird x negativ, so ist px negativ, $\frac{px^2}{a}$ aber positiv, (weil x^2 positiv ist); soll nun y eine wirkliche Größe werden, so muß $\frac{px^2}{a} > px$ d. h. $x^2 > ax$ d. h. $x > a$ seyn. Ist $x = -a$, so ist $px + \frac{px^2}{a} = -pa + \frac{pa^2}{a} = -pa + pa = 0$; folglich $y = 0$; d. h. Die Hyperbel schneidet die Axe; wächst das negative x über a hinaus, so erhält y^2 und also auch y einen Werth, der immer größer wird, je mehr x wächst.

Aus 2 und 3 ergiebt sich also, daß die Hyperbel zwei Scheitelpunkte in dem einen und in dem andern entgegengesetzten Kegel hat; daß diese in der Entfernung der Zwerchaxe von einander liegen; daß zwischen ihnen nichts von der Hyperbel sich findet; und endlich daß in beiden Kegeln die Arme der Hyperbel sich immer weiter von einander entfernen, je weiter sie fortgeführt werden, und daß sie folglich keine geschlossene Figur bilden, wie die Ellipse. Die Hyperbel hat 4 unendliche Arme oder Schenkel.

4. Die beiden Schenkel im entgegengesetzten Kegel sind vollkommen mit denen im ersten Kegel übereinstimmend; dies zeigt man dadurch, daß man darthut, es findet sich derselbe Werth von y für ein eben so großes x vom zweiten Scheitelpunct an. Für x vom er-

sten Scheitelpunkt an ist $y^2 = px + \frac{px^2}{a}$; will man diese Formel anwenden, um y^2 für ein eben solches x vom zweiten Scheitelpunkt an zu finden, so muß man dieses x vom ersten Scheitelpunkt an bestimmen, und dann ist die Abscisse erstlich negativ, und zweitens kommt zu ihr a hinzu; sie ist also $-a-x$. Setzt man diesen Werth in die obige Formel, so erhält man

$$y^2 = p(-a-x) + \frac{p.(-a-x)^2}{a} = -ap - px + \frac{a^2p + 2apx + px^2}{a} = -ap - px + ap + 2px + \frac{px^2}{a}$$
$$= px + \frac{px^2}{a}.$$

Die Fragen 5 und 6 sind schon bei 3 beantwortet.

7. Es heiße x eine Abscisse der Hyperbel, y die dazu gehörige Ordinate; v eine andere Abscisse und z die ihr zugehörige Ordinate; so ist

$$y^2 = px + \frac{px^2}{a} \text{ und } z^2 = pv + \frac{pv^2}{a}; \text{ folglich}$$

$$y^2 : z^2 = px + \frac{px^2}{a} : pv + \frac{pv^2}{a} = x + \frac{x^2}{a} : v + \frac{v^2}{a}$$
$$= ax + x^2 : av + v^2 = (a+x)x : (a+v)v;$$ d. h. bei der Hyperbel verhalten sich die Quadrate der Ordinaten wie die Rechtecke aus ihren Abscissen und den Summen der Abscissen und der Axe.

Zu §. 124.

$\frac{1}{4}p^2 = \frac{c^2u^2}{a^2} - \frac{1}{4}c^2$, und da nach §. 122.

$$p = \frac{c^2}{a}, \text{ alſo } \tfrac{1}{4}p^2 = \frac{c^4}{4a^2}; \text{ ſo iſt}$$

$$\frac{c^4}{4a} = \frac{c^2u^2}{a^2} - \tfrac{1}{4}c^2$$

$$c^4 = 4c^2u^2 - a^2c^2 \quad (4a^2$$

$$c^2) \quad c^2 = 4u^2 - a^2$$

$$a^2 + c^2 = 4u^2$$

$$\frac{a^2+c^2}{4} = u^2$$

$$\pm \frac{\sqrt{(a^2+c^2)}}{2} = u$$

Man findet die Entfernung des Brennpunktes vom Mittelpunkt durch die halbe Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate beider Axen.

Will man die Entfernung des Brennpunktes vom Scheitelpunkt finden, ſo ſetze man in der Formel

$$y^2 = px + \frac{px^2}{a}, \; y^2 = \tfrac{1}{4}p^2, \text{ ſo iſt}$$

$$\tfrac{1}{4}p^2 = px + \frac{px^2}{a}$$

$$p) \quad \tfrac{1}{4}p = x + \frac{x^2}{a}$$

und da $\tfrac{1}{4}p = \frac{c^2}{4a}$, ſo iſt

$$\frac{x^2}{a} + x = \frac{c^2}{4a}$$

$$x^2 + ax = \tfrac{1}{4}c^2$$

$$x^2 + ax + \tfrac{1}{4}a^2 = \tfrac{1}{4}(a^2 + c^2)$$

$$x + \tfrac{1}{2}a = \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(a^2+c^2)}$$

$$x = -\tfrac{1}{2}[a \pm \sqrt{(a^2+c^2)}]$$

Zu §. 125.

Beweis des Falles A.

S. Fig. 55.

Es sey der gegebene Punkt in der Hyperbel der Scheitelpunkt B, F und f die beiden Brennpunkte, so soll $FB - fB = a$ seyn.

$$FB = BA + AF = a + AF$$
$$fB = \qquad AF$$
$$\text{Ergo } BF - fB = a$$

Beweis des Falles B.

Es sey D der gegebene Punkt, $DfA = R$, so soll $DF - Df = a$ seyn.

$$Df = \tfrac{1}{2} p = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{c^2}{a} = \frac{c^2}{2a}.$$

$$DF^2 = Df^2 + fF^2 = \left(\frac{c^2}{2a}\right)^2 + (Cf + CF)^2,$$ und da $Cf + CF = 2\,CF = 2\left[\tfrac{1}{2}\sqrt{(a^2 + c^2)}\right] = \sqrt{(a^2 + c^2)}$ und daher $(Cf + CF)^2 = [\sqrt{(a^2 + c^2)}]^2 = a^2 + c^2$; so ist

$$DF^2 = \frac{c^4}{4a^2} + a^2 + c^2 = a^2 + c^2 + \frac{c^4}{4a^2}$$

$$DF = \sqrt{\left(a^2 + c^2 + \frac{c^4}{4a^2}\right)} = a + \frac{c^2}{2a} \text{ oder } - a - \frac{c^2}{2a}$$

Folglich $DF - Df = a + \frac{c^2}{a} - \frac{c^2}{2a} = a$

DF und Df wurden hier für positive y bestimmt, wird y hingegen negativ genommen, so muß DF und Df auch negativ seyn, dann ist also $Df = -\frac{c^2}{2a}$ und

$DF = -a - \frac{c^2}{2a}$; wo sodann $DF - Df = -a - \frac{c^2}{2a} - \left(-\frac{c^2}{2a}\right) = -a - \frac{c^2}{2a} + \frac{c^2}{2a} = -a$

Beweis des Falles C.

Es sey G der gegebene Punkt, C der Mittelpunkt der Zwerchaxe, so soll $GF - Gf = a$.

Man fälle GE senkrecht auf fF.

$$GF^2 = GE^2 + EF^2$$

$$GE^2 = y^2 = \frac{c^2 u^2}{a^2} - \tfrac{1}{4}c^2 \text{ s. §. 123.}$$

$$EF = CF + CE = \tfrac{1}{2}\sqrt{(a^2 + c^2)} + u$$

$$EF^2 = \frac{a^2 + c^2}{4} + u\sqrt{(a^2 + c^2)} + u^2$$

$GF^2 = GE^2 + EF^2 = \frac{c^2 u^2}{a^2} - \frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}c^2 + u\sqrt{(a^2 + c^2)} + u^2 = \frac{1}{4}a^2 + u\sqrt{(a^2 + c^2)} + u^2 + \frac{c^2 u^2}{a^2}$

$u = \frac{1}{4}a^2 + u\sqrt{(a^2 + c^2)} + \frac{a^2 u^2 + c^2 u^2}{a^2}$

$$GF = \tfrac{1}{2}a + \frac{u\sqrt{(a^2 + c^2)}}{a} \text{ oder } -\tfrac{1}{2}a - \frac{u\sqrt{(a^2 + c^2)}}{a}$$

$$Gf^2 = GE^2 + Ef^2$$

$$GE^2 = \frac{c^2 u^2}{a^2} - \tfrac{1}{4}c^2$$

$$Ef = Cf - CE = \tfrac{1}{2}\sqrt{(a^2 + c^2)} - u$$

$$Ef^2 = \frac{a^2 + c^2}{4} - u\sqrt{(a^2 + c^2)} + u^2$$

$Gf^2 = \frac{c^2 u^2}{a^2} - \frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}c^2 - u\sqrt{(a^2 + c^2)} + u^2$

$= \frac{1}{4}a^2 - u\sqrt{(a^2 + c^2)} + \frac{a^2 u^2 + c^2 u^2}{a^2}$

$$Gf = \frac{1}{2}a - \frac{u\sqrt{(a^2+e^2)}}{a} \text{ oder } - \frac{1}{2}a + \frac{u\sqrt{(a^2+c^2)}}{a}$$

Bei jedem positiven y, für welches also GF und Gf auch positiv seyn müssen, ist GF offenbar $= \frac{1}{2}a + \frac{u\sqrt{(a^2+c^2)}}{a}$; Gf hingegen muß $= -\frac{1}{4}a + u\frac{\sqrt{(a^2+c^2)}}{a}$ seyn; denn $\sqrt{(a^2+c^2)} > a$, daher $\frac{\sqrt{(a^2+c^2)}}{a} > 1$, folglich $\frac{u\sqrt{(a^2+c^2)}}{a} > u$; es ist aber u schon für den Scheitelpunkt $= \frac{1}{2}a$; soll daher Gf einen positiven Werth haben, so kann man es nicht $= \frac{1}{2}a - \frac{u\sqrt{(a^2+c^2)}}{a}$ setzen.

$$GF - Gf = \frac{1}{2}a + \frac{u\sqrt{(a^2+u^2)}}{a} - \left(-\frac{1}{2}a + \frac{u\sqrt{(a^2+c^2)}}{a}\right)$$

$$= \frac{1}{2}a + \frac{u\sqrt{(a^2+c^2)}}{a} + \frac{1}{2}a - \frac{u\sqrt{(a^2+c^2)}}{a} = a.$$

Nimmt man y hingegen negativ, so sind GF und Gf auch negativ, und dann ist $GF = -\frac{1}{2}a - \frac{u\sqrt{(a^2+c^2)}}{a}$ und $Gf = \frac{1}{2}a - \frac{u\sqrt{(a^2+u^2)}}{a}$; folglich $GF - Gf = -\frac{1}{2}a - \frac{u\sqrt{(a^2+c^2)}}{a} - \left(\frac{1}{2}a - \frac{u\sqrt{(a^2+e^2)}}{a}\right) = -\frac{1}{2}a - \frac{u\sqrt{(a^2+c^2)}}{a} - \frac{1}{2}a + \frac{u\sqrt{(a^2+c^2)}}{a} = -a.$

Beweis des Falles D.

Der gegebene Punkt sey H, so soll Hf — HF = a seyn; man fälle HI senkrecht auf AI; so ist

$$Hf^2 = HI^2 + fI^2$$

$$HI^2 = y^2 = \frac{c^2 u^2}{a^2} - \tfrac{1}{4} c^2$$

$$fI = fC + CI = \tfrac{1}{2} \sqrt{(a^2 + c^2)} + u$$

$$fI^2 = \frac{a^2 + c^2}{4} + u\sqrt{(a^2 + c^2)} + u^2$$

$$Hf^2 = HI^2 + FI^2 = \frac{c^2 u^2}{a^2} - \tfrac{1}{4} c^2 + \frac{a^2 + c^2}{4}$$

$$+ u\sqrt{(a^2 + c^2)} + u^2 = \frac{c^2 u^2}{a^2} - \tfrac{1}{4} c^2 + \tfrac{1}{4} a^2 + \tfrac{1}{4} c^2$$

$$+ u\sqrt{(a^2 + c^2)} + u^2 = \tfrac{1}{4} a^2 + u\sqrt{(a^2 + c^2)} + \frac{a^2 u^2 + c^2 u^2}{a^2}.$$

$$Hf = \tfrac{1}{2} a + \frac{u\sqrt{(a^2 + c^2)}}{a}$$

$$HF^2 = HI^2 + FI^2$$

$$HI^2 = \frac{c^2 u^2}{a^2} - \tfrac{1}{4} c^2$$

$$FI = CI - CF = u - \tfrac{1}{2}\sqrt{(a^2 + c^2)}$$

$$FI^2 = u^2 - u\sqrt{(a^2 + c^2)} + \frac{a^2 + c^2}{4}$$

$$HF^2 = \frac{c^2 u^2}{a^2} - \tfrac{1}{4} c^2 + u^2 - u\sqrt{(a^2 + c^2)} + \frac{a^2 + c^2}{4} =$$

$$\frac{c^2 u^2}{a^2} - \tfrac{1}{4} c^2 + u^2 - u\sqrt{(a^2 + c^2)} + \tfrac{1}{4} a^2 + \tfrac{1}{4} c^2 =$$

$$\tfrac{1}{4} a^2 - u\sqrt{(a^2 + c^2)} + \frac{a^2 u^2 + c^2 u^2}{a^2}.$$

$$HF = -\tfrac{1}{2} a + \frac{u\sqrt{(a^2 + c^2)}}{a}$$

$$Hf - HF = \tfrac{1}{2} a + \frac{u\sqrt{(a^2 + c^2)}}{a} - \left(-\tfrac{1}{2} a + \frac{u\sqrt{(a^2 + c^2)}}{a}\right)$$

$$= a.$$

Wir haben hier Hf und HF für positive y bestimmt, die Richtigkeit des Satzes aber für negative y, wo also Hf und HF auch negativ sind, sieht man aus dem, was bei dem Falle C gesagt worden.

Zu §. 128.

$\triangle CPR \cong \triangle CPr$, weil $CP = CP$, $CPR = CPr = R$ und $DCA = ACE$, da $CAD = CAE = R$ und $AD = AE$.

Zu §. 134.

Fig. 58. ist A der Scheitelpunkt der Hyperbel, C der Mittelpunkt, f und F die beiden Brennpunkte; M der Berührungspunkt, DM die Tangente, DP die Subtangente, MN die Normallinie, PN die Subnormallinie für den Punkt M; AP die Abscisse vom Scheitelpunkt $= x$; CP die Abscisse vom Mittelpunkt $= u$, und PM die dazu gehörige Ordinate $= y$. $EM = MF$, $EL = LF$ und also $MLF = R$.

subnorm. $= PN = NF - PF$ und da $PF = CP - CF$ so ist subonrm. $= NF - CP + CF = NF - u + \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 + c^2)}$.

Da LF und MN senkrecht auf LM stehen, so sind sie ‡, und also $\triangle fNM \sim \triangle fEF$; daher

$$NF : ME = Ff : Ef$$

$$NF : MF = Ff : Ef$$

$$NF : -\tfrac{1}{2}a + \frac{u\sqrt{(a^2 + c^2)}}{a} = \sqrt{(a^2 + c^2)} : a$$

(Daß Ff $= \sqrt{(a^2+c^2)}$ folgt aus §. 124; denn es ist Ff $= 2u$; daß Ef $= a$, ergiebt sich daraus, daß Ef $=$ Mf $-$ ME $=$ Mf $-$ MF (der Differenz beider Vectoren).

$$\text{Also NF} = -\tfrac{1}{2}a + \frac{\frac{u\sqrt{(a^2+c^2)}}{a} \cdot \sqrt{(a^2+c^2)}}{a} =$$

$$\frac{\frac{-\frac{1}{2}a^2 + u\sqrt{(a^2+c^2)}}{a} \cdot \sqrt{(a^2+c^2)}}{a} = \frac{-\frac{1}{2}a^2\sqrt{(a^2+c^2)} + u(a^2+c^2)}{a^2}$$

$$= \frac{-\frac{1}{2}a^2 \cdot \sqrt{(a^2+c^2)} + a^2u + c^2u}{a^2} = -\tfrac{1}{2}\sqrt{(a^2+c^2)} + u$$

$$+ \frac{c^2u}{a^2}.$$

Oben fanden wir: subnorm. $=$ NF $- u + \frac{1}{2}\sqrt{(a^2+c^2)}$ also ist subnorm. $= -\frac{1}{2}\sqrt{(a^2+c^2)} + u + \frac{c^2u}{a^2} - u$ $+ \frac{1}{2}\sqrt{(a^2+c^2)} = \frac{c^2u}{a^2}$

subtang. $= \frac{y^2}{\text{subnorm.}}$ Da nun nach §. 123.

$$y^2 = \frac{c^2u^2}{a^2} - \tfrac{1}{4}c^2$$

$$\text{so ist subtang.} \frac{\frac{c^2u^2}{a^2} - \frac{1}{4}c^2}{\frac{c^2u}{a^2}} = \frac{c^2u^2 - \frac{1}{4}a^2c^2}{c^2} =$$

$$\frac{u^2 - \frac{1}{4}a^2}{u} = \frac{4u^2 - a^2}{4u}.$$

tang. $= \sqrt{y^2 + \text{subtang.}^2}$, also tg.$^2 = y^2 +$ btang.^{2} und da

$$y^2 = \frac{c^2 u^2}{a^2} - \frac{1}{4} c^2 = \frac{c^2 u^2 - \frac{1}{4} a^2 c^2}{a^2} = \frac{(u^2 - \frac{1}{4} a^2) c^2}{a^2}$$

und subtang.$^2 = \frac{16 u^4 - 8 a^2 u^2 + a^4}{16 u^2} = \frac{u^4 - \frac{1}{2} a^2 u^2 + \frac{1}{16} a^4}{u^2}$

so ist tg.$^2 = \frac{c^2 u^2 - \frac{1}{4} a^2 c^2}{a^2} + \frac{u^4 - \frac{1}{2} a^2 u^2 + \frac{1}{16} a^4}{u^2} =$

$$= \frac{c^2 u^4 - \frac{1}{4} a^2 c^2 u^2 + a^2 u^4 - \frac{1}{2} a^4 u^2 + \frac{1}{16} a^6}{a^2 u^2} =$$

$$\frac{(u^2 - \frac{1}{4} a^2) c^2 u^2 + (u^2 - \frac{1}{4} a^2) . (u^2 - \frac{1}{4} a^2) . a^2}{a^2 u^2} =$$

$$\frac{[c^2 u^2 + (u^2 - \frac{1}{4} a^2) . a^2] . (u^2 - \frac{1}{4} a^2)}{a^2 u^2} =$$

$$\frac{c^2 u^2 + (u^2 - \frac{1}{4} a^2) a^2}{u^2} . \frac{u^2 - \frac{1}{4} a^2}{a^2} =$$

$$\frac{c^2 u^2 + (u^2 - \frac{1}{4} a^2) a^2}{c^2 u^2} . \frac{(u^2 - \frac{1}{4} a^2) c^2}{a^2} =$$

$$\frac{c^2 u^2 + (u^2 - \frac{1}{4} a^2) a^2}{c^2 u^2} \times y^2 = [c^2 u^2 + (u^2 - \frac{1}{4} a^2) a^2] . \frac{y^2}{c^2 u^2}$$

$$= [4 c^2 u^2 + (4 u^2 - a^2) a^2] . \frac{y^2}{4 c^2 u^2} =$$

$$(4 c^2 u^2 + 4 a^2 u^2 - a^4) . \frac{y^2}{4 c^2 u^2}$$

$$= [4 u^2 . (a^2 + c^2) - a^4] . \frac{y^2}{4 c^2 u^2},$$

Daher

$$\text{tg.} = \sqrt{\left([4 u^2 (a^2 + c^2) - a^4] . \frac{y^2}{4 c^2 u^2}\right)} =$$

$$\sqrt{[4 u^2 (a^2 + c^2) - a^4]} . \sqrt{\left(\frac{y^2}{4 c^2 u^2}\right)} =$$

$$\frac{y}{2 cu} \sqrt{[4 u^2 (a^2 + c^2) - a^4]}.$$

$$\text{Norm.} = \frac{y}{\text{subtang.}} \sqrt{(y^2 + \text{subtg.}^2)}.$$

Es war aber

$$\sqrt{(y^2 + \text{subtg.}^2)} = \text{tg.} = \frac{y}{2cu} \sqrt{[4u^2(a^2+c^2) - a^4]}.$$

also

$$\text{norm.} = \frac{y}{\text{subtg.}} \cdot \frac{y}{2cu} \cdot \sqrt{[4u^2(a^2+c^2) - a^4]} =$$

$$\frac{y^2}{2cu\,\text{subtg.}} \cdot \sqrt{[4u^2(a^2+c^2) - a^4]}.$$

$$\frac{y^2}{2cu\,\text{subtg.}} = \frac{\frac{(u^2 - \frac{1}{4}a^2)c^2}{a^2}}{2cu\,\text{subtg.}} = \frac{(u^2 - \frac{1}{4}a^2)c^2}{2a^2cu\,\text{subtg.}}$$

$$= \frac{(u^2 - \frac{1}{4}a^2)c}{2a^2u\,\text{subtg.}} = \frac{(u^2 - \frac{1}{4}a^2)c}{2a^2u \cdot \frac{4u^2 - a^2}{4u}}$$

$$\frac{(u^2 - \frac{1}{4}a^2)c}{a^2 \cdot \frac{4u^2 - a^2}{2}} = \frac{(2u^2 - \frac{1}{2}a^2)c}{a^2 \cdot (4u^2 - a^2)} = \frac{2u^2 - \frac{1}{2}a^2}{4u^2 - a^2} \cdot \frac{c}{a^2}$$

$$= \frac{4u^2 - a^2}{4u^2 - a^2} \cdot \frac{c}{2a^2} = \frac{c}{2a^2};$$

folglich ist $\text{norm.} = \frac{c}{2a^2} \sqrt{[4u^2(a^2+c^2) - a^4]}$

Zu §. 139.

Um $x = \sqrt{\frac{bcd}{a}}$ zu construiren, setze man $h = \frac{bc}{a}$

so findet man h als vierte Proportionallinie zu a, b und c; dann aber ist $h : x = x : d$.

Zu §. 143.

$x^2 + y^2 - 2bx - 2cy = 0$; setzt man $\frac{y^2}{p} = x$, so erhält man

$$\frac{y^4}{p^2} + y^2 - \frac{2by^2}{p} - 2cy = 0$$

$$y) \quad \frac{y^3}{p^2} + y - \frac{2by}{p} - 2c = 0$$

$$y^3 + p^2y - 2bpy - 2cp^2 = 0 \quad (p^2$$

$$y^3 - (2b - p)\,y - 2cp^2 = 0.$$

Zu §. 146.

1. Setzt man in die Gleichung $y^2 = ax - x^2$ den Werth $x = y - b$, so erhält man

$y^2 = a(y - b) - (y - b)^2 = ay - by - y^2 + 2by - b^2$ und hieraus folgt

$$y^2 = ay - y^2 + by - b^2$$

$$2y^2 - (a + b) = y - b^2$$

$$y^2 - \frac{a+b}{2} = \frac{-b^2}{2}$$

2. Man soll aus den beiden Gleichungen:

I. $y^2 + axy + bx^2 + cy + dx + e = 0$

II. $y + fx + g = 0$

x eliminiren.

Aus II. folgt: $x = -\frac{y+g}{f}$.

Setzt man diesen Werth in I, so erhält man

$$y^2 + ay \cdot -\frac{y+g}{f} + b \cdot \left(-\frac{y+g}{f}\right)^2 + cy + d \cdot -\frac{y+g}{f}$$
$$+ e = 0.$$

Es ist unnöthig diese Gleichung weiter aufzulösen; es reicht hin, sich davon zu überzeugen, daß kein Glied derselben y in einer höhern als der zweiten Potenz enthalten und also die Gleichung höchstens zu den quadratischen gehören und folglich höchstens zwei mögliche Wurzeln enthalten kann.

3. Man soll aus den beiden Gleichungen:

$$\text{I. } y^2 + axy + bx^2 + cy + dx + e = 0$$
$$\text{II. } y^2 + fxy + gx^2 + hy + ix + k = 0$$

x eliminiren.

Aus I. folgt $bx^2 = -y^2 - axy - cy - dx - e$

Aus II. folgt $gx^2 = -y^2 - fxy - hy - ix - k$

Also $bgx^2 = -gy^2 - agxy - cgy - dgx - eg$

$$bgx^2 = -by^2 - bfxy - bhy - bix - bk$$

$$gy^2 + agxy + cgy + dgx + eg = by^2 + bfxy + bhy + bix + bk$$

$$agxy - bfxy + dgx - bix = by^2 - gy^2 + bhy - cgy + eg - bk$$

$$x = \frac{(b-g)y^2 + (bh-cg)y + eg - bk}{(ag-bf)y + dg - bi}$$

Um sich die Fortsetzung zu erleichtern, setze man $b-g=\alpha$, $bh-cg=\beta$, $bk-eg=\gamma$, $ag-bf=\delta$ und $dg-bi=\varepsilon$, darnach ist $x = \frac{\alpha y^2 + \beta y + \gamma}{\delta y + \varepsilon}$

Setzt man diesen Werth in I., so ist

$$y^2 + ay.\frac{\alpha y^2 + \beta y + \gamma}{\delta y + \varepsilon} + b.\left(\frac{\alpha y^2 + \beta y + \gamma}{\delta y + \varepsilon}\right)^2 + cy + d.\frac{\alpha y^2 + \beta y + \gamma}{\delta y + \varepsilon} + e = o$$

$$y^2 + ay.\frac{\alpha y^2 + \beta y + \gamma}{\delta y + \varepsilon} + b.\frac{(\alpha y^2 + \beta y + \gamma)^2}{\delta y^2 + \delta y + \gamma^2} + cy + d.\frac{\alpha y^2 + \beta y + \gamma}{\delta y + \varepsilon} + e = o$$

Um aus dieser Gleichung die Brüche wegzuschaffen, muß man sie mit $\delta y^2 + 2\delta y + \varepsilon^2$ multipliciren; es ist unnöthig diese Operation selbst vorzunehmen, wir haben hier nur darauf zu achten, zu welchem Grade dadurch die Gleichung erhoben wird, und dies hängt von der Dignität ab, in der y höchstens vorkommen kann.

Man sieht leicht, daß diese sich aus $y^2 \times \delta y^2 + 2\delta y + \varepsilon^2$ ergeben muß; in diesem Produkt aber kömmt y^4 vor; es wird also die neue Gleichung eine biquadratische seyn.

Zu §. 148.

$$(2b - \tfrac{1}{2}r)\tfrac{1}{2}r = \tfrac{3}{4}r^2$$

$$br - \tfrac{1}{4}r^2 = \tfrac{3}{4}r^2$$

$$br = r^2$$

$$b) \quad b = r$$

Beweis, daß QN eine Wurzel der Gleichung: $y^3 - \frac{3}{4}r^2y - \frac{1}{4}r^2m = o$ ist.

Um den Beweis zu führen, ziehe man vN und CL

$\perp AX$; so ist $Cv = Bv - BC = QN - BC = y - \frac{1}{2}m$ und $vN = BQ = AQ - AB = x - r$.

$cN^2 = r^2 = Cv^2 + vN^2 = (y - \frac{1}{2}m)^2 + (x - r)^2 = y^2 - my + \frac{1}{4}m^2 + x^2 - 2rx + r^2$.

Da nun $CN^2 = r^2 = AC^2 = AB^2 + BC^2 = r^2 + \frac{1}{4}m^2$, so ist $y^2 - my + \frac{1}{4}m^2 + x^2 - 2rx + r^2 = r^2 + \frac{1}{4}m^2$, woraus folgt: $y^2 - my + x^2 - 2rx = 0$.

Es ist aber $y^2 = px$; also $x = \frac{y^2}{p}$ und für unsern Fall, wo $p = \frac{1}{2}r$ ist $x = \frac{y^2}{\frac{1}{2}r} = \frac{2y^2}{r}$; substituirt man hiernach, so findet man

$$y^2 - my + \frac{4y^4}{r^2} - 4y^2 = 0$$

$$r^2y^2 - mr^2y + 4y^4 - 4r^2y^2 = 0$$

$$4y^4 - 3r^2y^2 - mr^2y = 0$$

$$4) \qquad y^4 - \frac{3}{4}r^2y - \frac{1}{4}r^2m = 0.$$

Zu §. 149.

Zu 3. $\frac{4}{3}\pi + \frac{1}{3}\varphi + \frac{1}{3}\varphi = \frac{4}{3}\pi + \frac{2}{3}\varphi$

$\frac{4}{3}\pi + \frac{1}{3}\varphi - \frac{1}{3}\varphi = \frac{4}{3}\pi$

$\frac{4}{3}\pi + \frac{2}{3}\varphi + \frac{2}{3}\pi + \frac{1}{3}\varphi = 2\pi + \varphi$

$\frac{4}{3}\pi + \frac{2}{3}\varphi - \frac{2}{3}\pi - \frac{1}{3}\varphi = \frac{2}{3}\pi + \frac{1}{3}\varphi$

Zu §. 150.

III. Ist der gegebene Cosinus negativ, so gehört dazu

a. ein Winkel zwischen 90° und 180°, dessen Drittheil ist <90°, also der dazu gehörige Cosinus positiv.

b. Ein Winkel zwischen 450° und 540° dessen Drittheil fällt zwischen 150° und 180°; sein Cosinus also negativ.

c. Ein Winkel zwischen 810° und 900°, dessen Drittheil fällt zwischen 270° und 300°, sein Cosinus ist also positiv.

Man muß nicht meinen, daß hier der Winkel zwischen 180° und 270° vergessen worden; er giebt dasselbe Resultat, was c gegeben, denn Cosinus zwischen 60° und 90° ist positiv.

Zu §. 157.

$$x^2 = (a-x)a$$
$$x^2 = a^2 - ax$$
$$x^2 + ax = a^2$$
$$x = -\tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{(a^2 + \tfrac{1}{4}a^2}$$

$$x^2 = (a+x)a$$
$$x^2 = a^2 + ax$$
$$x^2 - ax = a^2$$
$$x^2 = \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{(a^2 + \tfrac{1}{4}a^2)}.$$

Zu §. 161.

Ist BCA = 36°, so ist BAC + ACB = 144° und da AC = BC, so ist BAC = ACB = 72°.

BDC = $\frac{1}{2}$ BAC (weil AD = AC) = 36° und also auch ACD = 36°; folglich BCA + ACD = BCD = 72°; hieraus ergiebt sich $\triangle BAC \backsim \triangle BDC$, denn der Winkel bei B ist beiden gemein und BAC = BCD = 72°; daher

$$BA:BC = BC:BD$$
$$x:r = r:r+x$$
$$r^2 = rx + x^2$$
$$r^2 = x^2 + rx$$
$$r^2 + \tfrac{1}{4}r^2 = x^2 + rx + \tfrac{1}{4}r^2$$
$$\sqrt{(\tfrac{5}{4}r^2)} = x + \tfrac{1}{2}r$$
$$-\tfrac{1}{2}r \pm \sqrt{(\tfrac{5}{4}r^2)} = x$$

Zu §. 162.

Es ist $BD^2 = EB^2 + DE^2$.

$EB = \frac{1}{2}AB$, also $EB^2 = \frac{1}{4}AB$ und da $AB^2 = AC^2 + BC^2 = 2r^2$; so ist $EB^2 = \frac{1}{4}.2r^2 = \frac{1}{2}r^2$.

DE = DC − EC; EC = BC, weil BEC = R und ECB = $\frac{1}{2}$R, also ECB = EBC; daher $DF = r - BC = r - \frac{1}{2}AB = r - \frac{1}{2}\sqrt{2r^2} = r - \frac{1}{2}\sqrt{2}.\sqrt{r^2} = r - \frac{1}{2}r\sqrt{2}$, folglich $DE^2 = (r - \frac{1}{2}r\sqrt{2})^2 = r^2 - r^2\sqrt{1} + \frac{1}{2}r^2 = \frac{3}{2}r^2 - r^2\sqrt{2}$.

$BD^2 = EB^2 + DE^2 = \frac{1}{2}r^2 + \frac{3}{2}r^2 - r^2\sqrt{2} = 2r^2 - r^2\sqrt{2} = r^2(2 - \sqrt{2})$; also $BD = \sqrt{[r^2(2 - \sqrt{2})]}$.

Zu §. 165.

Die Aufgabe liefert folgende Proportionen

I. $p:x = y:q$. II. $x + y = n$.

Aus

Aus II. folgt $y = n - x$, dies in I. gesetzt, so erhält man

$$p : x = n - x : q$$

$$pq = nx - x^2$$

$$x^2 - nx = -pq$$

$$x = \frac{1}{2}n \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}n^2 - pq\right)}$$

Beantwortung der Fragen.

1. Ein Rechteck von gegebenem Inhalt zu beschreiben, wenn die Summe zweier anliegenden Seiten desselben gegeben ist.

2. Es ist eine mittlere Proportionallinie und von den dazu gehörigen äußern Gliedern die Summe oder die Differenz gegeben, man soll diese äußern Glieder finden.

Auflösung.

A, wenn die Summe $= n$ gegeben ist.

Die Gleichungen sind I. $x : p = p : y$ II. $x + y = n$

aus II. $y = n - x$ in I. gesetzt, giebt:

$$x : p = p : n - x$$

$$p^2 = nx - x^2$$

$$x^2 - nx = -p^2$$

$$x = \frac{1}{2}n \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}n^2 - p^2\right)}$$

$$y = n - x = n - \frac{1}{2}n \mp \sqrt{\left(\frac{1}{4}n^2 - p^2\right)} = \frac{1}{2}n \mp \sqrt{\left(\frac{1}{4}n^2 - p^2\right)}$$

B, wenn die Differenz gegeben ist, dann findet man

$$x = -\frac{1}{2}n \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}n^2 - p^2\right)}$$

und $y = n + x = n - \frac{1}{2}n \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}n^2 - p^2\right)} = \frac{1}{2}n \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}n^2 - p^2\right)}$

wo sowohl bey x als y der negative Werth nicht statt finden kann.

3. Ein gegebenes Quadrat in ein Rechteck zu verwandeln, von dessen beiden anliegenden Seiten die Summe oder der Unterschied gegeben worden.

Zu §. 166.

$$bc - bx = ay$$

$$bc - b[\tfrac{1}{2}c \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}c^2 - ac)}] = ay$$

$$bc - \tfrac{1}{2}bc \mp b\sqrt{(\tfrac{1}{4}c^2 - ac)} = ay$$

$$\tfrac{1}{2}bc \mp \sqrt{(\tfrac{1}{4}c^2 - ac)} = ay$$

a) $\dfrac{\tfrac{1}{2}bc \mp \sqrt{(\tfrac{1}{4}c^2 - ac)}}{a} = y$

Ankündigung

für Aerzte, Apotheker, Gutsbesitzer, Oekonomen, Gärtner und Färber, so wie für jeden Liebhaber der Natur- und Pflanzkunde.

Flora Pomerana

oder

Beschreibung derer in Vor- und Hinter-Pommern sowohl wild wachsenden als auch in der Kultur daselbst leicht fortkommenden

Gewächse

Nebst Bezeichnung ihres Gebrauchs für die Arznei, Technologie, Haus- und Landwirthschaft, ihres etwanigen Nutzens und Schadens.

In 2 Theilen herauszugeben von

G. Homann,

Prediger zu Budow in der Stolpeschen Synode.

Unter diesem Titel wage ich es endlich, mit einem Unternehmen ans Licht zu treten, woran ich schon seit mehr als 20 Jahren mit Vorliebe und Sorgfalt gearbeitet und gesammelt habe.

Zunächst habe ich dadurch den Botanikern und Liebhabern dieses interessanten Theils der Naturkunde, das so lange gefühlte Bedürfniß befriedigen wollen, eine möglichst vollständige Uebersicht von denen Gewächsen zu geben, welche in ganz Pommern einheimisch sind, nebst Anzeige des Standortes und der Gegend, wo, so wie des Monats, wenn sie in Blühte anzutreffen sind.

Sodann werden mir ohne Zweifel die Herren Aerzte und Apotheker dafür Dank wissen, daß ich ihnen sämmtliche officinelle Gewächse, welche in Pommern wild angetroffen werden, anzeige, damit sie sich solche nicht von fernher verschreiben dürfen, und viel Geld ersparen können.

Drittens suche ich dies Werk dadurch gemeinnützlicher zu machen, daß ich in die Pommersche Flora auch alle diejenigen Gewächse mit aufnehme, welche entweder seit mehreren Jahren erst einheimisch geworden sind, oder doch als Garten- und Feldgewächse in der Kultur von Pommern leicht fortkommen. Dahin gehören denn alle Getreide-Arten, die in Pommern gebaut werden, Futtergräser und Kräuter, so wie die gemeinsten Blumen- und Gartengewächse, wie auch die einheimischen Gift-, Färber-, und Manufactur-Kräuter, bei denen ich den Gebrauch, den Nutzen und Schaden anführen werde.

Zur Verständlichung der botanischen Kunstsprache, sollen einige Erläuterungen und Kupfertafeln beigefügt werden, so wie denn auch die nöthigen Register nicht fehlen werden.

Nach diesen bezeichneten Zwecken gedenke ich diese Pommersche Flora in zwei Theilen herauszugeben, auf gut weißes Papier gedruckt. Jeder Theil wird etwa 2 Alphabete stark werden. Der Preiß für jeden Theil, würde nicht billiger als 2 Rthlr. 12 gr. Pr. Cour. seyn können.

So sehr ich im Voraus auf einen guten Absatz rechne, indem dies Werk nicht nur für Pommern, sondern auch für alle benachbarte Provinzen von Interesse seyn muß; so wird es mir doch angenehm seyn, wenn die Herren Interessenten in portofreien Briefen, entweder in der Nauckschen Buchhandlung zu Berlin, oder in der Nikolaischen — zu Stettin, der Unzerschen — zu Königsberg in Pr. oder auch bei mir selbst, binnen hier und Johanni 1818 auf die Pommersche Flora prämumeriren oder subscribiren, da sie dann als die ersten Beförderer derselben namentlich vorgedruckt werden sollen. Sobald eine Anzahl von wenigstens 200 bestimmten Abnehmern zusammenkommt, soll unverzüglich der Druck des Werks seinen Anfang nehmen. Wer Subscribenten zu diesem vaterländischen Unternehmen sammelt, erhält für seine Mühe auf 6 Exemplare das 7te frei.

G. Homann, als Verfasser.

Die Naucksche Buchhandlung zu Berlin,
als Verleger im Januar 1818.

Bayerische StaatsBibliothek

Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Kiesewetter, Johann Gottfried Carl Christian, 1766-1819

Die ersten Anfangsgründe der reinen Mathematik zum Gebrauch für den Selbstunterricht

Bd.: [2,a]

Berlin 1818

Math.p. 253-2/2,a

urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082126-6